Алгебра, 2 курс

Листок 4

Конечно порожденные абелевы группы.

Определение 1. Пусть — абелева группа. Будем говорить, что система элементов

$$\{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subseteq A$$

порождает A, если

$$\forall a \in A\ \exists n_1, n_2 \dots, n_k \in \mathbb{Z} : a = a_1 n_1 + a_2 n_2 + \dots + a_k n_k.$$

Множество $a_1, a_2, \dots, a_k$ называется системой *порождающих* (*образующих*). Если оно конечно, то группа G называется *конечно порожденной*. Будем писать $A = \langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle$.

Определение 2. Назовем систему элементов $\{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subseteq A$ *независимой*, если из условия $a_1 n_1 + a_2 n_2 + \dots + a_k n_k = 0$ следует, что $\forall i\ n_i = 0$.

Определение 3. Если система элементов $\{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subseteq A$ является независимой и порождает абелеву группу A, то она называется *базисом*.

Задача 1. Пусть $A = \langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle$, а элементы $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ образуют независимую систему. Докажите, что $m \geqslant k$.

Определение 4. Группа A называется *группой без кручения*, если каждый ее неединичный элемент имеет бесконечный порядок.

Определение 5. Для соотношения

$$a_1 n_1 + a_2 n_2 + \dots + a_k n_k = 0, \quad n_i \neq 0$$

назовем *высотой* этого соотношения число $\min\{|n_i| \mid i = 1, \dots, k\}$. Соотношение такого вида на элементы $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ будем называть *минимальным*, если его высота минимальна среди всех высот соотношений на $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$.

Задача 2. Пусть A — абелева группа без кручения. Докажите, что если $a_1 n_1 + a_2 n_2 + \dots + a_k n_k = 0$ — минимальное соотношение, то НОД$(n_1, n_2, \dots, n_k) = 1$.

Задача 3. Пусть $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ — система образующих группы A, $a_1 n_1 + a_2 n_2 + \dots + a_k n_k = 0$ — соотношение высоты 1. Без ограничения общности можно считать, что $n_k = 1$. Докажите тогда, что $A = \langle a_1, a_2, \dots, a_{k-1} \rangle$.

Задача 4. Если высота минимального соотношения системы образующих абелевой группы A без кручения $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ равна $h > 1$, то существует другая система образующих $\{a_1', a_2', \dots, a_k'\}$, высота минимального соотношения которой строго меньше h.

Задача 5. Используя предыдущие задачи докажите, что

а) всякая конечно порожденная абелева группа без кручения имеет базис;

б) все базисы данной группы равномощны (имеют одинаковое количество элементов).

Определение 6. Конечно порожденная абелева группа A называется *свободной группой ранга* n, если
$$A \cong \mathbb{Z}^n = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{n}$$

Задача 6. Докажите, что всякая конечно порожденная абелева группа без кручения является свободной.

Задача 7. Пусть A — конечно порожденная свободная абелева группа ранга n, B — подгруппа группы A. Докажите, что существует такой базис $\{a_1, v_2, \ldots, v_n\}$ группы A и элемент $b_1 \in B$, что $A = \langle a_1 \rangle \oplus A_1$, $B = \langle b_1 \rangle \oplus B_1$, $B_1 \subseteq A_1$ и $b_1 = m_1 a_1$, $m_1 \in \mathbb{Z}$.

Задача 8. Пусть B — ненулевая подгруппа свободной абелевой группы A конечного ранга n. Докажите, что

а) B конечно порождена;

б) B свободна;

в) можно выбрать базисы $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ и $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ в A и B соответственно, так, что $b_i = m_i a_i$, где m_i — неотрицательные целые числа, и $m_{i-1} | m_i$ для всех $i \leqslant k$, для $j > k$ $m_j = 0$.

Задача 9. Докажите, что любой гомоморфный образ $\varphi(A)$ свободной абелевой группы A ранга n изоморфен группе
$$\mathbb{Z}^{n-k} \oplus \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{m_k}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

Задача 10. Докажите, что любая конечно порожденная абелева группа A является гомоморфным образом некоторой конечно порожденной свободной абелевой группы.

Задача 11. Докажите, что всякая конечно порожденная абелева группа является прямой суммой свободной абелевой группы конечного ранга и конечной абелевой группы. Всякая конечная абелева группа является прямой суммой циклических групп порядков $m_1, \ldots, m_k$, причем $m_{i-1} | m_i$.

Определение 7. Циклические группы вида $\mathbb{Z}_{p^k}$, где p — простое, называются *примарными*.

Задача 12. Докажите, что любая конечно порожденная абелева группа раскладывается в сумму конечного числа бесконечных циклических и примарных циклических групп и это разложение единственно с точностью до перестановки слагаемых.

Задача 13. Предположим, что свободная конечно порожденная группа A задана базисом $e_1, \ldots, e_n$, а ее подгруппа B задана своим базисом $f_1, \ldots, f_m$, где для каждого $i = 1, \ldots, m$ $f_i = a_{i,1} e_1 + \cdots + a_{i,n} e_n$, все $a_{i,j} \in \mathbb{Z}$. Докажите, что любое элементарное целочисленное преобразование строк или столбцов матрицы $(a_{i,j})$ (перестановка, умножение на -1, прибавление к одной строке или столбцу другой (другого), умноженной на целое число) приведет к матрице $(a'_{i,j})$, выражающей некоторый базис $\{f'_1, \ldots, f_m\}'$ подгруппы B через базис $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ группы A.

Задача 14. Докажите, что элементарными преобразованиями, описанными в предыдущей задаче, можно привести целочисленную матрицу $(a_{i,j})$ к строго ступенчатому виду $(a'_{i,j})$, где $a_{1,1} | a_{2,2}$, ..., $a_{k-1,k-1} | a_{k,k}$, остальные элементы матрицы равны нулю.

Комментарий. Заметьте, что это утверждение эквивалентно утверждению задачи 8 о выборе согласованных базисов для свободной конечно порожденной абелевой группы и ее подгруппы. Почему нельзя было доказать теорему о строении конечно порожденных абелевых групп, пользуясь только последними двумя задачами?

Задача 15. Найдите все абелевы группы порядка

а) 100; б) 128; в) 202.

Задача 16. Разложите в прямую сумму циклических групп факторгруппу A/B, где A — свободная абелева группа с базисом x_1, x_2, x_3, B — ее подгруппа, порожденная y_1, y_2, y_3:

$$\text{а)}\quad \begin{cases} y_1 &= 7x_1 + 2x_2 + 3x_3, \\ y_2 &= 21x_1 + 8x_2 + 9x_3, \\ y_3 &= 5x_1 - 4x_2 + 3x_3; \end{cases} \qquad \text{б)}\quad \begin{cases} y_1 &= 5x_1 + 5x_2 + 3x_3, \\ y_2 &= 5x_1 + 6x_2 + 5x_3, \\ y_3 &= 8x_1 + 7x_2 + 9x_3. \end{cases}$$

Задача 17. Приведите пример абелевой группы, не раскладывающейся в прямую сумму циклических групп.

Определение 8. Абелева группа A называется *делимой*, если для любого $a \in A$ и любого натурального n существует $b \in A$ такое, что $nb = a$.

Задача 18. Докажите, что для любого простого числа p группа $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ всех комплексных корней из единицы степеней p^n, $n \in \mathbb{N}$, является делимой.

Задача 19. Докажите, что любая счетная делимая абелева группа является прямой суммой некоторого (может быть, бесконечного) набора экземпляров группы $\mathbb{Q}$ и групп $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ для разных простых чисел p.

Задача 20. Докажите, что делимая группа выделяется прямым слагаемым в любой группе, в которой она содержится в качестве подгруппы.

Задача 21. Найдите все гомоморфизмы из группы $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ в произвольную абелеву группу.