

Алгебра, 2 курс

Листок 5

Группы малых порядков. Теоремы Силова

ЗАДАЧА 1. Опишите с точностью до изоморфизма все абелевы группы из p^3 элементов (p — простое).

ЗАДАЧА 2. Найдите с точностью до изоморфизма все группы из 8 элементов.

ЗАДАЧА 3. Для каждого простого p постройте неабелеву группу из p^3 элементов.

ЗАДАЧА 4. Приведите пример, показывающий, что обращение теоремы Лагранжа неверно: найдите такую конечную группу G , $|G| = n$, и число $m|n$, что в группе G не существует подгруппы из m элементов.

ЗАДАЧА 5*. Для какого минимального n можно построить пример предыдущей задачи?

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть G — группа, $|G| = p^n m$, где p — простое число, а m — целое число, взаимно простое с p . Подгруппа $P \subset G$ порядка $|P| = p^n$ (если таковая существует) называется *силовской p -подгруппой* группы G .

ЗАДАЧА 6. Найдите все силовские 2-группы и 3-группы в группе S_4 .

ЗАДАЧА 7. Пусть $|G| = p^n \cdot m$, $(p, m) = 1$. Пусть существует класс сопряженных элементов группы G , порядок которого не делится на p . Докажите, что тогда в группе G есть силовская p -подгруппа. Докажите, что если такого класса не существует, то порядок центра группы G делится на p .

ЗАДАЧА 8. Пусть $|G| = p^n \cdot m$, $(p, m) = 1$. Докажите, что если группа G абелева, то ее подгруппа, состоящая из всех элементов, порядки которых являются степенями числа p (*подгруппа p -крючения*), является силовской p -подгруппой.

ЗАДАЧА 9 (ПЕРВАЯ ТЕОРЕМА СИЛОВА). Докажите по индукции, что в любой конечной группе для любого простого p существует силовская p -подгруппа.

ЗАДАЧА 10. Пусть G — группа, P — одна из ее силовских p -подгрупп. Пусть P_1 — произвольная p -подгруппа группы G , не обязательно силовская. Рассмотрим действие группы P_1 левыми сдвигами на множестве $G/P = \cup_i g_i P$ левых смежных классов G по P . Докажите, что хотя бы одна из орбит при этом действии имеет длину 1, т. е.

$$P_1 \cdot aP = aP \text{ для некоторого } a = g_i \in G.$$

ЗАДАЧА 11 (ВТОРАЯ ТЕОРЕМА СИЛОВА). Пусть P — силовская подгруппа группы G , P_1 — некоторая p -подгруппа в G . Докажите, что тогда существует $a \in G$ такое, что $aP_1a^{-1} \subset P$. В частности, докажите, что все силовские p -подгруппы группы G сопряжены.

ЗАДАЧА 12. Выведите из второй теоремы Силова, что в группе S_4 не может содержаться подгруппа, изоморфная Q_8 .

ЗАДАЧА 13. Пусть P — силовская p -подгруппа группы G , $C(P)$ — класс всех силовских p -подгрупп группы G . Докажите, что при действии сопряжениями группы P на множество $C(P)$ единственной неподвижной точкой является сама подгруппа P .

Задача 14 (ТРЕТЬЯ ТЕОРЕМА СИЛОВА). Число силовских p -подгрупп сравнимо с 1 по модулю p .

Задача 15. Докажите, что любая группа порядка 45 абелева.

Задача 16. Докажите, что в группе порядка pq (p, q — простые различные числа) всегда существует нормальная подгруппа, отличная от $\{e\}$ и всей группы.

Задача 17. Найдите с точностью до изоморфизма все группы из 12 элементов.

Задача 18 **. Найдите наименьшее натуральное n такое, что количество неизоморфных групп порядка n превосходит n .