Алгебра, 2 курс

Листок 6

Коммутанты. Разрешимые группы. Простые группы. Полупрямые произведения

Определение 1. Если x, y — элементы некоторой группы G, то элемент $[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}$ называется *коммутатором* элементов x и y.

Определение 2. *Коммутантом* группы G (обозначение $[G, G]$ или G') называется подгруппа в G, порожденная коммутаторами всех ее элементов.

Задача 1. Докажите, что коммутант группы всегда является нормальной подгруппой.

Задача 2. Докажите, что $G/[G, G]$ — абелева группа.

Задача 3. Докажите, что коммутант группы G является наименьшей нормальной подгруппой группы G, фактор по которой абелев.

Задача 4. Найдите коммутанты следующих групп:
а) $\mathbf{S}_n$; б) $\mathbf{A}_n$; в) $\mathbf{Q}_8$; г) $\mathbf{D}_n$; д)* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ и $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, где $\mathbb{K}$ — поле.

Задача 5**. Верно ли, что произведение двух коммутаторов группы является коммутатором?

Определение 3. Производным рядом группы G называется ряд

$$G^{(0)} = G; G^{(1)} = [G, G]; G^{(2)} = [G^{(1)}, G^{(1)}]; \dots, G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}]; \dots$$

Определение 4. Группа G называется *разрешимой*, если существует такое натуральное n, что $G^{(n)} = \{e\}$.

Задача 6. Будут ли разрешимы группы $\mathbf{S}_n$, $\mathbf{A}_n$, $\mathbf{D}_n$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K}$ — поле)?

Задача 7. Докажите, что если группа G разрешима, то разрешима любая ее подгруппа и факторгруппа.

Задача 8. Докажите, что если в группе G существует разрешимая нормальная подгруппа N такая, что факторгруппа G/N разрешима, то группа G разрешима.

Задача 9. Докажите, что группа $TU_n(\mathbb{K})$ верхних треугольных матриц над полем $\mathbb{K}$ разрешима.

Задача 10. Докажите, что любая группа из
а) 12; б) 20; в) 100; г) 36;
д) pq, где p, q — различные простые числа;
е) p^n, где p — простое число;
ж) p^2q, где p, q — различные простые числа;
з)* n, где $n < 60$;
и)* pqr, где p, q и r — различные простые числа;
к)** pq^n, где p, q — различные простые числа,
элементов разрешима.

Определение 5. Группа G называется *простой*, если она не является абелевой и единственными ее нормальными подгруппами являются она сама и $\{e\}$.

Задача 11. Разрешимая группа не может быть простой. Может ли неразрешимая группа не являться простой?

Задача 12. Докажите, что при $n \geqslant 5$ группа $\mathbf{A}_n$ проста.

Задача 13. Докажите, что группа $\operatorname{PSL}_n(\mathbb{K}) = \operatorname{SL}_n(\mathbb{K})/\mathbf{Z}(\operatorname{SL}_n(\mathbb{K}))$ проста, если

а) $n = 2$, $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле;

б) $n \geqslant 3$, $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле;

в)* $n = 2$, $\mathbb{K}$ — произвольное поле, содержащее более трех элементов;

г)** $n \geqslant 3$, $\mathbb{K}$ — произвольное поле.

Задача 14. Сколько подгрупп порядка 7 в простой группе из 168 элементов? Почему такая простая группа существует?

Задача 15 *. Докажите, что любая простая группа из 60 элементов изоморфна $\mathbf{A}_5$.

Задача 16 **. Докажите, что группа $\operatorname{PSL}_2(\mathbb{Z}_7)$ изоморфна группе $\operatorname{PSL}_3(\mathbb{Z}_2)$.

Определение 6. Группа G называется *полупрямым произведением* своих подгрупп N и H, если

1) $N \cap H = \{e\}$;

2) подгруппа N нормальна в G;

3) любой элемент $g \in G$ записывается в виде $g = nh$, где $n \in N$, $h \in H$.

Задача 17. Докажите, что если группа G представлена в виде полупрямого произведения подгрупп N и H, то представление элемента g в виде nh единственно.

Задача 18. Докажите, что если группа G конечна, N — нормальная подгруппа в G, H — подгруппа в G, $N \cap H = \{e\}$, $|N| \cdot |H| = |G|$, то G является полупрямым произведением групп N и H.

Задача 19. Пусть N и H — две группы, φ — некоторый гомоморфизм из H в группу $\operatorname{Aut} N$. Докажите, что тогда существует группа G, изоморфная полупрямому произведению групп N и H, с условием $(n_1h_1) \cdot (n_2h_2) = n_1\varphi(h_1)(n_2)h_1h_2$. Докажите, что любое полупрямое произведение групп N и H получается таким способом.

Задача 20. Найдите с точностью до изоморфизма все группы из

а) 10; б) 12; в) 20; г)** 24 элементов.