Алгебра, 2 курс

Листок 7

Кольца.

Определение 1. Множество R с двумя операциями $+$ и $\cdot$ называется *кольцом*, если $(R,+)$ — абелева группа и

$$\forall a,b,c \in R \quad a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \text{ и } (a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c.$$

Кольцо R называется *ассоциативным*, если операция $\cdot$ ассоциативна; *кольцом с единицей*, если $\exists e \in R \forall r \in R e\cdot r = r\cdot e = r$; *коммутативным*, если операция $\cdot$ коммутативна.

Задача 1. Определите понятие изоморфизма колец и найдите все неизоморфные ассоциативные кольца с единицей из $2,3,4,5$ элементов.

Задача 2. Являются ли кольцами (ассоциативными, коммутативными кольцами, кольцами с единицей) следующие числовые множества с обычными операциями сложения и умножения:

а) множество $\mathbb{Z}$;

б) множество $n\mathbb{Z}$ $(n>1)$;

в) множество неотрицательных целых чисел;

г) множество рациональных чисел, в несократимой записи которых знаменатели делят фиксированное число $n \in \mathbb{N}$;

д) множество рациональных чисел, в несократимой записи которых знаменатели не делятся на фиксированное простое число p;

е) множество рациональных чисел, в несократимой записи которых знаменатели являются степенями фиксированного простого числа p;

ж) множество вещественных чисел вида $x+y\sqrt{2}$, где $x,y \in \mathbb{Q}$;

з) множество вещественных чисел вида $x+y\sqrt[3]{2}$, где $x,y \in \mathbb{Q}$;

и) множество вещественных чисел вида $x+y\sqrt[3]{2}+z\sqrt[3]{4}$, где $x,y,z \in \mathbb{Q}$;

к) множество комплексных чисел вида $x+yi$, где $x,y \in \mathbb{Z}$;

л) множество комплексных чисел вида $x+yi$, где $x,y \in \mathbb{Q}$;

м) множество всевозможных сумм вида $a_1z_1+a_2z_2+\dots+a_nz_n$, где $a_1, dots, a_n \in \mathbb{Q}$, $z_1,z_2,\dots,z_n$ — комплексные корни степени n из 1?

Задача 3. Являются ли кольцами (ассоциативными, коммутативными кольцами, кольцами с единицей) следующие множества матриц относительно матричного сложения и умножения:

а) множество вещественных симметрических матриц порядка n;

б) множество вещественных ортогональных матриц порядка n;

в) множество верхних треугольных матриц порядка $n \geqslant 2$;

г) множество матриц порядка $n \geqslant 2$, у которых две последних строки нулевые;

д) множество матриц вида $\begin{pmatrix} x & y \\ ay & x \end{pmatrix}$, где a — фиксированное целое число, $x,y \in \mathbb{Z}$;

е) множество вещественных матриц вида

$$\begin{pmatrix} z & -y & -z & -t \\ y & x & -t & z \\ z & t & x & -y \\ t & -z & y & x \end{pmatrix}?$$

Теперь будем считать все рассматриваемые кольца ассоциативными.

Определение 2. Элемент x кольца R с единицей называется *обратимым слева* (*справа*), если существует $y \in R$ такой, что $yx = 1$ ($xy = 1$). Элемент называется *обратимым*, если он обратим слева и справа. Элемент $x \in R$ называется *нильпотентным*, если $x^n = 0$ для некоторого натурального n. Элемент $x \neq 0$ кольца R называется *делителем нуля*, если в кольце R существует $y \neq 0$ такое, что $xy = 0$ (или $yx = 0$).

Задача 4. Найдите все делители нуля и нильпотентные элементы в кольцах задач 2 и 3. Найдите все обратимые элементы для колец с единицей из этих задач.

Задача 5. Может ли кольцо не содержать нильпотентных элементов, но содержать делители нуля?

Задача 6. Пусть R — конечное кольцо. Докажите, что если R не содержит делителей нуля, то оно имеет единицу и все его ненулевые элементы обратимы. Верно ли какое-то из этих утверждений для произвольного бесконечного кольца без делителей нуля?

Задача 7. Пусть R — кольцо с единицей, $x, y \in R$. Докажите, что

а) если произведения xy и yx обратимы, то элементы x и y также обратимы;

б) если R без делителей нуля и произведение xy обратимо, то x и y обратимы;

в) без дополнительных предположений о кольце R из обратимости произведения xy не следует обратимость элементов x и y;

г) если обратим элемент $1 + xy$, то обратим и элемент $1 + yx$.

Определение 3. Пусть I — некоторое множество, $\{R_i \mid i \in I\}$ — семейство колец, занумерованных этим множеством. *Прямым произведением* колец R_i называется кольцо $\prod\limits_{i \in I} R_i$, каждый элемент которого есть отображение f из множества I в объединение $\cup_{i \in I} R_i$ с условием $f(i) \in R_i$ для всех $i \in I$. Сложение и умножение таких функций вводится покомпонентно ($(f \cdot g)(i) = f(i) \cdot g(i)$ и $(f + g)(i) = f(i) + g(i)$).

Прямой суммой колец R_i называется подкольцо $\bigoplus\limits_{i \in I} R_i$ прямого произведения колец R_i, каждый элемент которого является является функцией f, у которой лишь конечное число $f(i)$, $i \in I$, отлично от нуля.

Задача 8. Докажите, что прямая сумма и прямое произведение любого числа колец являются кольцами. В каком случае

$$\prod_{i \in I} R_i = \bigoplus_{i \in I} R_i?$$

Задача 9. Пусть R — прямая сумма колец $R_1, \ldots, R_n$.

а) При каких условиях R коммутативно; имеет единицу; не имеет делителей нуля?

б) Найдите в R все обратимые элементы; все делители нуля; все нильпотентные элементы.

в)* Как ответить на вопросы предыдущих пунктов, если множество колец в прямой сумме бесконечно; если рассматривается их прямое произведение?

Определение 4. Элемент e кольца R называется *идемпотентом*, если $e^2 = e$. Идемпотент e называется *центральным*, если он коммутирует со всеми элементами кольца.

Задача 10. Докажите, что кольцо R с единицей представляется в виде прямой суммы двух своих нетривиальных подколец тогда и только тогда, когда в нем есть центральный идемпотент, отличный от нуля и единицы.

Задача 11. Докажите, что если все элементы кольца с единицей — идемпотенты, то кольцо коммутативно.

Задача 12. Рассмотрим множество 2^M всех подмножеств некоторого множества M с операциями объединения и пересечения. Является ли оно кольцом относительно этих операций? Если да, то есть ли в нем единица; какие элементы являются обратимыми; делителями нуля; идемпотентами?

Определение 5. Подмножество I кольца R называется *идеалом*, если
1) I — абелева группа по сложению;
2) для любых $x \in R$, $a \in I$ $xa, ax \in I$.

Задача 13. Найдите все идеалы в кольцах $\mathbb{Z}$, $\mathbb{K}[x]$, $M_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}[[x]]$ ($\mathbb{K}$ — произвольное поле).

Определение 6. Идеал I кольца R называется *главным*, если он порождается одним элементом. Кольцо R называется *кольцом главных идеалов*, если все его идеалы — главные.

Задача 14. При каких условиях на коммутативное кольцо R являются кольцами главных идеалов следующие кольца: $R[x]$, $R[x, y]$, $R[[x]]$, $M_n(R)$, $R \oplus R$?

Определение 7. Собственный идеал I кольца R называется *максимальным*, если он не содержится строго ни в каком другом собственном идеале кольца R.

Задача 15. Найдите максимальные идеалы следующих колец: $\mathbb{Z}$; $\mathbb{Z}_n$ $(n \in \mathbb{N})$; $\mathbb{K}[x]$; $\mathbb{K}[[x]]$; $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K}$ — поле); $\mathbb{Z}[x]$; $R_1 \oplus \dots \oplus R_n$.

Задача 16 *. Докажите, что в любом кольце R с единицей существует максимальный идеал. Верно ли это, если в кольце нет единицы?

Определение 8. Если R — некоторое кольцо, I — его идеал, то *факторкольцом* R/I называется множество классов эквивалентности $x + I$ ($x \sim y$ тогда и только тогда, когда $x - y \in I$) с операциями сложения $(x+I) \oplus (y+I) = (x+y)+I$ и умножения $(x+I) \otimes (y+I) = xy + I$.

Задача 17. Докажите, что R/I является кольцом.

Задача 18. Найдите факторкольцо кольца матриц $M_n(\mathbb{Z})$ по идеалу $M_n(n\mathbb{Z})$.

Задача 19. Пусть поле $\mathbb{K}$ содержит k элементов, поле $\mathbb{L}$ — l элементов, φ — гомоморфизм из поля $\mathbb{K}$ в поле $\mathbb{L}$. Сколько элементов может содержать образ этого гомоморфизма?

Задача 20 (теорема о гомоморфизме для колец). Докажите, что если $\varphi : R \to S$ — гомоморфизм из кольца R в кольцо S, то ядро этого гомоморфизма — это некоторый идеал I кольца R, образ гомоморфизма изоморфен R/I.

Задача 21. Докажите, что если R — коммутативное кольцо с единицей, то факторкольцо R/I является полем тогда и только тогда, когда идеал I — максимальный.