Алгебра, 2 курс

Листок 8

Поля.

Определение 1. Кольцо $\mathbb{F}$ с единицей называется *телом*, если $(\mathbb{F} \setminus \{0\}, \cdot)$ является группой. Коммутативное тело называется *полем.*

Задача 1. Докажите, что кольцо вычетов $\mathbb{Z}_n$ является полем тогда и только тогда, когда n — простое.

Задача 2. Какие из колец задач 2 и 3 предыдущего листка являются полями?

Определение 2. В поле $\mathbb{F}$ наименьшее натуральное число n, для которого $\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n} = 0$, называется *характеристикой поля* $\mathbb{F}$ (обозначение: $\operatorname{char} \mathbb{F}$). Если такого натурального n не существует, то говорят, что характеристика поля $\mathbb{F}$ равна 0.

Задача 3. Докажите, что если у поля характеристика не равна нулю, то она является простым числом.

Задача 4. Докажите, что если поле $\mathbb{F}$ имеет характеристику 0, то в него естественно вложено подполе $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Если поле $\mathbb{F}$ имеет характеристику p, то в него естественно вложено подполе $\mathbb{Z}_p$.

Задача 5. Докажите, что конечное поле может содержать только p^n элементов, где p — простое, n — натуральное число.

Задача 6. Существует ли бесконечное поле положительной характеристики?

Задача 7. Докажите, что поле из p^2 элементов, где p — простое число, имеет единственное собственное подполе.

Задача 8. Найдите все автоморфизмы полей а) $\mathbb{Z}_p$, б) $\mathbb{Q}$, в) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, г) $\mathbb{R}$.

Задача 9. Существует ли поле, строго содержащее поле комплексных чисел?

Задача 10*. Может ли поле быть изоморфно своему собственному подполю?

Задача 11. Докажите, что если поле $\mathbb{F}$ характеристики p конечно, то отображение $x \mapsto x^p$ является его автоморфизмом.

Задача 12. Какие из уравнений а) $x^2 = 5$; б) $x^7 = 7$; в) $x^3 = a$ имеют решение в поле $\mathbb{Z}_{11}$?

Определение 3. Поле L называется *расширением* поля K, если K является подполем в L. Расширение L поля K называется *конечным*, если $\dim_K L < \infty$. Число $\dim_K L <$ в этом случае называется *степенью* расширения L.

Элемент $x \in L$ называется *алгебраическим* над K, если он удовлетворяет некоторому нетривиальному алгебраическому уравнению с коэффициентами из K, и *трансцендентным* в противном случае. Расширение L поля K называется *алгебраическим*, если всякий его элемент алгебраичен над K.

Задача 13. Докажите, что любое конечное расширение поля является алгебраическим. Является ли алгебраическим расширением $\mathbb{R}$ над $\mathbb{Q}$?

Задача 14. Пусть K — поле, $K[x]$ — кольцо многочленов, $f(x) \in K[x]$ — произвольный многочлен степени n. Докажите, что факторкольцо $L = K[x]/(f(x))$ является полем тогда и только тогда, когда многочлен $f(x)$ неприводим над K. Докажите, что в этом случае L является конечным расширением поля K степени n (*простое расширение*).

Задача 15. Как с помощью предыдущей задачи построить поле комплексных чисел из поля действительных чисел; поля из 4, 8, 9 элементов?

Задача 16. Если L — конечное расширение поля K, а M — конечное расширение поля L, то M — конечное расширение поля K, причем

$$\dim_K M = \dim_K L \cdot \dim_L M.$$

Определение 4. Пусть $K \subset L$ — поля. Для любых элементов $u_1, \ldots, u_n \in L$ совокупность элементов поля L, которые могут быть представлены в виде отношения элементов кольца $K[u_1, \ldots, u_n]$, является подполем, называемым *подполем, порожденным над K элементами* $u_1, \ldots, u_n$, оно обозначается через $K(u_1, \ldots, u_n)$.

Задача 17. Если поле L порождается над K конечным числом алгебраических элементов $u_1, \ldots, u_n$, то оно является конечным расширением поля K.

Задача 18. Пусть K — какое-либо расширение поля K. Совокупность $\overline{K}$ всех элементов поля L, алгебраических над K, является подполем, алгебраически замкнутым в L (в том смысле, что любой элемент поля L, алгебраический над $\overline{K}$, принадлежит $\overline{K}$).

Задача 19. Докажите, что поле $\overline{Q}$ алгебраических чисел (всех комплексных чисел, являющихся корнями многочленом с рациональными коэффициентами) алгебраически замкнуто.

Определение 5. Расширение L поля K называется *полем разложения* многочлена $f \in K[x]$ (не обязательно неприводимого), если f разлагается в $L[x]$ на линейные множители и поле L порождается над K его корнями.

Гомоморфизмы (в частности, изоморфизмы) расширений поля K, тождественные на K, называются *гомоморфизмами* (*изоморфизмами*) *над* K.

Задача 20. Поле разложения любого многочлена $f \in K[x]$ существует.

Задача 21. Пусть $P(\alpha)$ — расширение поля P, полученное присоединением корня α неприводимого многочлена $h \in P[x]$, и φ — гомоморфизм поля P в некоторое поле F. Гомоморфизм φ продолжается до гомоморфизма $\psi : P(\alpha) \to F$ ровно столькими способами, сколько различных корней имеет в F многочлен $\varphi(h)$, полученный из h применением к его коэффициентам гомоморфизма φ.

Задача 22. Поле разложения любого многочлена $f \in K[x]$ единственно с точностью до изоморфизма над K.

Задача 23. Какая степень может быть у поля разложения кубического многочлена над полем K, $\operatorname{char} K \neq 2$?

Задача 24. Докажите, что если поле F состоит из q элементов, то каждый элемент поля F является корнем многочлена $x^q - x$.

Задача 25. Докажите, что для любого поля F и любого его автоморфизма φ неподвижные точки этого автоморфизма образуют подполе в F.

Задача 26. Для любого простого p и натурального n существует поле из p^n элементов и все такие поля изоморфны (обозначение: $\mathbb{F}_{p^n}$).

Задача 27. Для каких m и n поле $\mathbb{F}_{p^n}$ содержит $\mathbb{F}_{p^m}$ в качестве подполя?

Задача 28. Докажите, что мультипликативная группа конечного поля является циклической.

Задача 29 **. Существует ли автоморфизм поля $\mathbb{C}$, отличный от тождественного и сопряжения?

Задача 30 ** (теорема Веддерберна). Докажите, что любое конечное тело является полем.