

Вопросы к коллоквиуму по алгебре

осень 2021, группа 241, лектор И.В.Аржанцев

1. Группа, подгруппа, гомоморфизм, изоморфизм и автоморфизм. Примеры групп: числовые (аддитивные и мультипликативные), вычеты, группы подстановок, группы матриц, группы симметрий, группа диэдра D_n , группа кватернионов Q_8 .
2. Циклические подгруппы, порядок элемента, циклические группы и их подгруппы.
3. Криптография с открытым ключом. Задача дискретного логарифмирования и метод повторного возведения в квадрат. Система Диффи-Хеллмана обмена ключами. Криптосистема Эль-Гамала.
4. Смежные классы, индекс подгруппы, теорема Лагранжа и пять следствий из нее.
5. Нормальные подгруппы, факторгруппы, теорема о гомоморфизме, примеры.
6. Группа автоморфизмов $\text{Aut}(G)$, группы автоморфизмов циклических групп, группа внутренних автоморфизмов $\text{Int}(G)$, центр группы.
7. Классы сопряженности, централизатор элемента, формула для числа элементов в классе сопряженности, классы сопряженности в группах S_n , D_n и $\text{GL}_n(\mathbb{C})$.
8. Внешние и внутренние прямые произведения групп, факторизация по сомножителям, разложение конечной циклической группы.
9. Абелевы группы: периодическая часть, группы без кручения, конечно порожденные и свободные группы. Базис и ранг свободной абелевой группы, матрица перехода.
10. Подгруппа свободной абелевой группы ранга n свободна и ее ранг не превосходит n , приведение целочисленной матрицы к диагональному виду, теорема о согласованных базисах.
11. Факторгруппы свободных абелевых групп, универсальное свойство свободной абелевой группы, разложение конечно порожденной абелевой группы в прямую сумму циклических, единственность разложения конечной абелевой группы в прямую сумму примарных циклических.
12. Экспонента конечной группы. Конечная подгруппа мультипликативной группы поля циклическая. Единственность разложения конечно порожденной абелевой группы.
13. Порождающие элементы. Группа A_n порождена тройными циклами и произведениями пар независимых транспозиций ($n \geq 5$), порождающие группы D_n , группа $\text{GL}_n(F)$ порождена элементарными матрицами, а группа $\text{SL}_n(F)$ – элементарными матрицами первого типа.
14. Коммутатор элементов, коммутант и его свойства. Характеристические подгруппы.
15. Коммутанты групп S_n , A_n , D_n , $\text{SL}_n(F)$ и $\text{GL}_n(F)$. Кратные коммутанты, их характеристичность и нормальность.
16. Разрешимые группы, основные примеры и свойства, производный ряд, разрешимость группы верхнетреугольных матриц.
17. Простые группы, существование композиционного ряда, абелевы простые группы.
18. Простота группы A_n ($n \geq 5$).
19. Действие группы на множестве, орбиты и стабилизаторы, транзитивные, свободные и эффективные действия, ядро неэффективности действия, примеры действий, три действия группы на себе, теорема Кэли.
20. Сопряженность стабилизаторов точек одной орбиты, изоморфизм действий, транзитивное действие изоморфно действию на G/H , длина орбиты конечной группы, формула Бернсайда.
21. p -группы, нетривиальность центра и разрешимость.
22. Факторгруппа $G/Z(G)$ не может быть циклической, коммутативность групп порядка p^2 .
23. Силовские подгруппы. Первая теорема Силова.
24. Вторая теорема Силова.
25. Третья теорема Силова.
26. Группа порядка pq разрешима ступени не выше двух.