2. Автоморфизмы.

Определение 1. Пусть G – группа. *Эндоморфизмом* группы G называется гомоморфизм $\varphi\colon G \to G$. ґ*Автоморфизм* группы G – это биективный эндоморфизм, то есть изоморфизм $\varphi\colon G \to G$.

Задача 1. Какие структуры образуют множества $\mathrm{End}(G)$ и $\mathrm{Aut}(G)$ всех эндоморфизмов и автоморфизмов G соответственно с операцией композиции?

Задача 2. Опишите все эндоморфизмы и автоморфизмы группы
а) $\mathbb{Z}$,
б) $\mathbb{Z}_n$.
Чему при этом изоморфны $\mathrm{End}(G)$ и $\mathrm{Aut}(G)$?

Задача 3. Пусть группы G и H изоморфны. Докажите, что существует ровно $|\mathrm{Aut}(G)|$ различных изоморфизмов $G \to H$.

Задача 4. а) Опишите явно все изоморфизмы между $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_5)$ и $\mathbb{Z}_4$.
б) $*$ Для каких n группа $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)$ циклическая?

Задача 5. Пусть g – элемент группы G. Рассмотрим отображение $\varphi_g\colon G \to G$, $\varphi_g(h) = ghg^{-1}$.
а) докажите, что φ_g – автоморфизм. (Такие автоморфизмы называются *внутренними.*)
б) докажите, что все внутренние автоморфизмы образуют подгруппу $\mathrm{Inn}(G)$ в $\mathrm{Aut}(G)$.
в) докажите, что $\mathrm{Inn}(G)$ нормальна в $\mathrm{Aut}(G)$.
г) докажите, что $\mathrm{Inn}(G) \cong G/Z(G)$.

Задача 6. Докажите, что $\mathrm{Aut}(S_3) = \mathrm{Inn}(S_3) \cong S_3$.

Задача 7. а) $*$ Докажите, что при $n \neq 6$ выполняется $\mathrm{Aut}(S_n) = \mathrm{Inn}(S_n)$.
б) $*$ Приведите пример внешнего автоморфизма S_6.

Задача 8. Сколько элементов в
а) $\mathrm{Inn}(D_n)$?
б) $\mathrm{Aut}(D_n)$?

Задача 9. Чему изоморфна группа $\mathrm{Aut}(D_4)$?

Задача 10. Чему изоморфна группа $\mathrm{Aut}(Q_8)$?

Определение 2. Подгруппа $H \subset G$ называется *характеристической*, если она сохраняется (не поэлементно, а в целом как множество) при любом автоморфизме группы G.

Задача 11. а) Докажите, что любая характеристическая подгруппа нормальна.
б) Приведите пример характеристической подгруппы.
в) Приведите пример нормальной, но не характеристической подгруппы.

Задача 12. $*$ Существуют ли две неизоморфные конечные группы, у которых для каждого $k \in \mathbb{N}$ одинаковое количество элементов порядка k?

Задача 13. $*$ Изоморфны ли группы $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ и $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$?

3. Теорема Лагранжа. Нормальные подгруппы. Фактор-группы.

Определение 3. Центр группы G – это множество элементов, коммутирующих со всеми. $Z(G) = \{z \in G \mid \forall g \in g : zg = gz\}$.

Задача 14. Докажите, что $Z(G)$ – подгруппа.

Задача 15. Найдите центр группы
а) D_n
б) Q_8
в) $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$

Задача 16. Докажите, что подгруппа, индекс которой – минимальный простой делитель порядка $|G|$ нормальна.

Задача 17. $*$ Докажите теорему Коши. Пусть G – конечная группа. И пусть p – простой делитель порядка G. Тогда в G есть подгруппа порядка p.

Задача 18. $*$ Приведите пример того, что предыдущая задача не верна, если p не простое.

Задача 19. Опишите смежные классы $\mathbb{Z}$ по $n\mathbb{Z}$, найдите факторгруппу $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Задача 20. Опишите левые и правые смежные классы группы S_3 по подгруппе $\langle(1,2)\rangle$.

Задача 21. Докажите, что подгруппа A_n нормальна в S_n. Опишите смежные классы S_n по A_n, найдите факторгруппу S_n/A_n.

Задача 22. Докажите, что подгруппа $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ нормальна в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Опишите смежные классы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ по $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, найдите факторгруппу.

Задача 23. Докажите, что подгруппа V_4 нормальна в S_4. Найдите факторгруппу S_4/V_4.

Задача 24. Докажите, что подгруппа верхнетреугольных матриц с единицами на диагонали нормальна в группе верхнетреугольных матриц. Найдите факторгруппу.

Задача 25. Найдите факторгруппу $\mathbb{C}^\times/\mathbb{R}_{>0}$.

Задача 26. Найдите факторгруппу $\mathbb{C}^\times/\mathbb{R}^\times$.

Задача 27. Пусть $G = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid \det A^6 = 1\}$. Найдите факторгруппу $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/G$.

Задача 28. Пусть H_n – множество комплексных чисел с аргументами $\frac{2\pi k}{n}$. Найдите факторгруппу H_{12}/H_4.

Задача 29. Приведите пример подгрупп $A \subset B \subset C$ таких, что A нормальна в B, B нормальна в C, но A не нормальна в C.

Задача 30. $*$ Пусть H – подгруппа индекса k в группе G. Докажите, что существует нормальная подгруппа $G \triangleright N$ такая, что $N \subset H$ и индекс N в G не превосходит $k!$.