1. Алгебраические структуры. Гомоморфизм. Изоморфизм. Подгруппы.

Говорят, что на множестве G задана *бинарная операция*, если задано отображение $\mu\colon G \times G \to G$. (Аналогично определяется n-арная операция). Часто используют обозначения $xy = x * y = \mu(x, y)$.

Определение 1. Множество G с бинарной операцией называется *группоидом.*

- Группоид, операция которого ассоциативна, то есть для любых $a, b, c \in G$ выполнено $(ab)c = a(bc)$, называется *полугруппой.*
- Если в полугруппе есть нейтральный элемент e, то есть такой элемент, что для любого $g \in G$ выполнено $eg = ge = g$, то данная полугруппа называется *моноидом*
- Если в моноиде для каждого элемента g есть *обратный*, то есть такой элемент g^{-1}, что $gg^{-1} = g^{-1}g = e$, то данный моноид называется группой.
- Группа, в которой выполняется *коммутативность*, то есть для любых $a, b \in G$ верно $ab = ba$, называется *абелевой* или, что то же самое, *коммутативной группой.*

Задача 1. Привести примеры полугруппы, которая не является моноидом, и моноида, который не является группой. Можно ли сделать эти примеры конечными?

Задача 2. Пусть M – множество всех подмножеств множества X. (в том числе X и $\varnothing$) Какую структуру образует M с операцией
а) пересечения,
б) объединения,
в) симметрической разности.

Задача 3. Образуют ли невырожденные симметрические матрицы $n \times n$ группу относительно операции умножения матриц?

Задача 4. Образуют ли ортогональные матрицы $n \times n$ группу относительно операции умножения матриц?

Задача 5. Пусть G – множество с ассоциативной бинарной операцией. При этом выполняется
а)

- Существует такой элемент e, что для любого $g \in G$ выполнено $eg = g$.
- Для каждого $g \in G$ найдется элемент $g^{-1} \in G$ такой, что $gg^{-1} = e$.

б)

- Существует такой элемент e, что для любого $g \in G$ выполнено $eg = g$.
- Для каждого $g \in G$ найдется элемент $g^{-1} \in G$ такой, что $gg^{-1} = g^{-1}g = e$.

Верно ли, что G обязательно является группой?

Определение 2. *Порядком* элемента g группы (моноида) называется минимальное натуральное k такое, что $g^k = e$ – нейтральный элемент.

Задача 6. Найти порядок перестановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 5 & 10 & 8 & 1 & 6 & 7 & 3 & 9 & 4 \end{pmatrix}$.

Задача 7. Пусть G – абелева группа. Обозначим через $G[m]$ множество элементов $g \in G$ таких, что $g^m = e$. Докажите, что $G[m]$ – подгруппа. Верно ли это для неабелевой G?

Задача 8. В группе G квадрат каждого элемента равен единице. Докажите, что G коммутативна.

Задача 9. а) Пусть порядок элемента g равен m. Чему равен порядок элемента g^s?
б) Сколько элементов порядка k в циклической группе порядка n?
в) Сколько подгрупп порядка k в циклической группе порядка n?

Определение 3. Гомоморфизм из группы $(G, *)$ в группу $(H, \circ)$ – это такое отображение $\varphi\colon G \to H$, что $\varphi(g_1 * g_2) = \varphi(g_1) \circ \varphi(g_2)$.

Задача 10. Сколько различных гомоморфизмов
а) из $\mathbb{Z}_3$ в $\mathbb{Z}_4$?
б) из $\mathbb{Z}_{15}$ в $\mathbb{Z}_{12}$?

Определение 4. Изоморфизм групп – это биективный гомоморфизм.

Задача 11. Изоморфны ли группы
а) $\mathbb{Z}_3$ и $\mathbb{Z}_4$?
б) $\mathbb{Z}_6$ и S_3?
в) $(\mathbb{R}, +)$ и $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$?

Задача 12. Какие из следующих групп изоморфны между собой, а какие – нет? $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +), \mathbb{Q}^\times, \mathbb{R}^\times, \mathbb{C}^\times$

Определение 5. Непустое подмножество $H \subset G$ называется *подгруппой*, если H является группой относительно той же операции.

Задача 13. а) Непустое подмножество $H \subset G$ является подгруппой тогда и только тогда, когда выполнены следующие 2 условия

- если h и h' лежат в H, то $hh' \in H$.
- если $h \in H$, то $h^{-1} \in H$.

б) Если подмножество H конечно, то достаточно выполнения только первого условия.

Задача 14. Докажите, что
а) множество всех движений $\mathbb{R}^n$ является группой.
а) множество всех движений $\mathbb{R}^n$, сохраняющих данную фигуру $F \subset \mathbb{R}^n$, является группой. Такая группа называется *группой симметрий* F и обозначается $\mathrm{Sym}(F)$.

Задача 15. Сколько элементов в группе симметрий
а) правильного n-угольника (такая группа обозначается D_n и называется группой диэдра)
б) правильного тетраэдра
в) куба
г) правильного икосаэдра

Задача 16. Придумайте фигуру F такую, что $\mathrm{Sym}(F)$
а) состоит из 3 элементов.
б) состоит из 4 элементов, но не изоморфна $\mathbb{Z}_4$.

Задача 17. Докажите, что группа симметрий правильного тетраэдра изоморфна S_4.

Вращением фигуры $F \subset \mathbb{R}^n$ назовем движение, сохраняющее F, определитель линейной части которого равен 1.

Задача 18. Докажите, что вращения данной фигуры образуют группу.

Задача 19. $*$ Докажите, что группа вращений куба изоморфна S_4.

Задача 20. $*$ Существуют ли две неизоморфные конечные группы, у которых для каждого $k \in \mathbb{N}$ одинаковое количество элементов порядка k?

Задача 21. $*$ Изоморфны ли группы $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ и $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$?