Листок 4. Образующие и соотношения. Классы сопряженности.

Задача 1. Докажите, что
а) S_n порождается транспозициями $(i, i+1)$,
б) S_n порождается транспозициями $(1,2)$ и $(1,2,\ldots,n)$,
в) A_n порождается тройными циклами,
г) A_n порождается элементами $(a,b)(c,d)$ при $n \geq 5$.

Задача 2. Задайте образующими и соотношениями группу а) V_4, б) Q_8, в) S_4, г) A_4, д)* S_n

---

Определение 1. *Класс сопряженности* элемента $g \in G$ – это множество $C(g) = \{hgh^{-1} | h \in G\}$.

Задача 3. Опишите классы сопряженности в
а) S_n
б) Q_8
в) D_n

Задача 4. Пусть $H \subset G$ – подгруппа индекса 2, и $C \subset H$ – класс G-сопряженности. Докажите, что C – либо один класс H-сопряженности, либо объединение двух классов H-сопряженности одинаковой мощности.

Задача 5. Опишите классы сопряженности в
а) A_4,
б) A_n.

Задача 6. Найдите все нормальные подгруппы в а) S_4 , б) Q_8 , в) D_5 , г) D_6 д) A_4

Определение 2. Централизатор элемента g – это $Z(g) = \{h \in G | gh = hg\}$.

Задача 7. а) Докажите, что $Z(g)$ – подгруппа.
б) Докажите, что $|C(g)| \cdot |Z(g)| = |G|$.

Задача 8. Докажите, что центр группы из p^n элементов, где p – простое число, содержит более одного элемента.

Задача 9. Докажите, что группа порядка p^2 коммутативна.

Задача 10. Докажите, что группа автоморфизмов некоммутативной группы G не может быть циклической.

Задача 11. Пусть G – группа верхнетреугольных матриц с единицами на диагонали с элементами из $\mathbb{Z}_p$
а) Докажите, что G – некоммутативная группа порядка p^3,
б) Найдите центр G,
в) Опишите классы сопряженности в G.

Задача 12. $*$ Докажите, что фактор-группа группы $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_3)$ по центру изоморфна S_4.

Задача 13. $*$ Найдите число классов сопряженности и число элементов в каждом классе для некоммутативной группы порядка p^3.