

Листок 5. АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ.

Задача 1. Разлагаются ли в прямое произведение следующие группы:

- а) \mathbb{Z}
- б) S_3
- в) A_4
- г) S_4
- д) Q_8
- е) D_n

Задача 2. Пусть A_1, \dots, A_k – подгруппы абелевы группы, имеющие взаимно простые порядки. Докажите, что сумма подгрупп A_i является прямой.

Задача 3. Найдите $\text{Aut}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2)$.

Задача 4. а) Докажите, что подгруппа конечно порожденной абелевой группы конечно порождена.

- б) Верно ли это утверждение для абелевых моноидов?
- в) Верно ли это утверждение для неабелевых групп?

Задача 5. Изоморфны ли группы $\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{36}$ и $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{18}$?

Задача 6. Разбить на классы изоморфных групп $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{36} \oplus \mathbb{Z}_{50}$, $\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{15} \oplus \mathbb{Z}_{40}$, \mathbb{Z}_{3600} и $\mathbb{Z}_{40} \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{30}$.

Задача 7. а) Перечислить с точностью до изоморфизма все абелевы группы порядка 200. б) Сколько с точностью до изоморфизма абелевых групп порядка n ? (Не совсем хороший ответ. То есть не в элементарных функциях.)

Задача 8. Сколько элементов порядка

- а) 2, 4 и 6 в $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3$?
- б) 2, 4 и 5 в $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_5$?

Задача 9. Есть ли в группе $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{16}$ подгруппа, изоморфная

- а) $\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2$?
- б) $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$?

Задача 10. Сколько подгрупп порядка 2 и 6 в нециклической абелевой группе порядка 12?

Задача 11. Пусть A – конечная абелева группа, порядок которой делится на натуральное число m . Докажите, что в A есть подгруппа порядка m .

Задача 12. Найти разложение на примарные циклические группы

$$(\langle a \rangle_9 \oplus \langle b \rangle_{27}) / \langle 3a + 9b \rangle$$

Задача 13. Изоморфны ли группы

$$(\langle a \rangle_2 \oplus \langle b \rangle_4) / \langle 2b \rangle \quad \text{и} \quad (\langle a \rangle_2 \oplus \langle b \rangle_4) / \langle a + 2b \rangle?$$

Задача 14. Пусть A – свободная абелева группа с базисом $\{x_1, x_2, x_3\}$. И пусть B – ее подгруппа, порожденная y_1, y_2 и y_3 . Найдите, чему изоморфна фактор-группа G/H , если

а)

$$\begin{cases} y_1 = 7x_1 + 2x_2 + 3x_3; \\ y_2 = 21x_1 + 8x_2 + 9x_3 \\ y_3 = 5x_1 - 4x_2 + 3x_3. \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} y_1 = 5x_1 + 5x_2 + 3x_3; \\ y_2 = 5x_1 + 6x_2 + 5x_3 \\ y_3 = 8x_1 + 7x_2 + 9x_3. \end{cases}$$

в)

$$\begin{cases} y_1 = 4x_1 + 5x_2 + x_3; \\ y_2 = 8x_1 + 9x_2 + x_3 \\ y_3 = 4x_1 + 6x_2 + 2x_3. \end{cases}$$

г)

$$\begin{cases} y_1 = 6x_1 + 5x_2 + 4x_3; \\ y_2 = 7x_1 + 6x_2 + 9x_3 \\ y_3 = 5x_1 + 4x_2 - 4x_3. \end{cases}$$

Задача 15. а) В факторгруппе свободной абелевой группы A с базисом $\{x_1, x_2, x_3\}$ по подгруппе B , порожденной элементами $x_1 + x_2 + 4x_3$ и $2x_1 - x_2 + 2x_3$, найти порядок смежного класса $(x_1 + 2x_3) + B$.

б) В факторгруппе свободной абелевой группы A с базисом $\{x_1, x_2, x_3\}$ по подгруппе B , порожденной элементами $2x_1 + x_2 - 50x_3$ и $4x_1 + 5x_2 + 60x_3$, найти порядок элемента $(32x_1 + 31x_2) + B$.