

## ПРОГРАММА КОЛЛОКВИУМА

1) Понятие группы. Аддитивные и мультипликативные обозначения. Таблица Кэли. Подгруппа. Проверка, что подмножество является группой. Ассоциативность композиции. Примеры групп.

2) Гомоморфизм групп, простейшие свойства гомоморфизмов. Изоморфизм групп. Примеры изоморфизмов. Доказательство, что  $Q_8$  – это группа.

3) Ядро и образ гомоморфизма. Критерий инъективности гомоморфизма.

4) Простейшие следствия из аксиом (6 штук), в том числе обобщенная ассоциативность, единственность единицы и обратного.

5) Автоморфизмы. Группа внутренних автоморфизмов. Группы автоморфизмов групп  $\mathbb{Z}$  и  $\mathbb{Z}_n$ .

6) Степень элемента группы. Порядок элемента группы. Порядок степени данного элемента. Циклические группы. Классификация циклических групп. Подгруппы циклических групп.

7) Смежные классы по подгруппе. Индекс подгруппы. Теорема Лагранжа и следствия из нее (в том числе теорема Эйлера).

8) Нормальные подгруппы. Факторгруппа. Объяснение, почему определение факторгруппы корректно тогда и только тогда, когда подгруппа нормальна. Канонический гомоморфизм.

9) Ядро гомоморфизма является нормальной подгруппой. Теорема о гомоморфизме. Связь между порядками ядра и образа.

10) Подгруппа, порожденная подмножеством. Подгруппа, порожденная двумя подгруппами, одна из которых нормальна. Вторая теорема о гомоморфизме.

11) Третья теорема о гомоморфизме и следствие из нее.

12) Центр группы. Изоморфизм между факторгруппой по центру и группой внутренних автоморфизмов. Нециклическость факторгруппы по центру.

13) Эквивалентность слов. Свободная группа. Проблема равенства слов.

14) Универсальное свойство свободной группы. Нормальное замыкание. Задание группы образующими и соотношениями. Пример: группа Диэдра.

15) Внешнее и внутреннее прямое произведение групп. Теорема о факторизации прямого произведения.

16) Свободная абелева группа. Ранг свободной абелевой группы. подгруппа свободной абелевой группы. Описание всех базисов через заданный базис.

17) Универсальное свойство свободной абелевой группы. Теорема о согласованных базисах. Представление конечнопорожденной абелевой группы в виде суммы циклических.

18) Китайская теорема об остатках. Порядок элемента прямого произведения. Теорема о строении конечно порожденной абелевых групп (существование).

19) Подгруппа кручения. Теорема о строении конечно порожденных абелевых групп (единственность). Единственность первой канонической формы конечно порожденной абелевой группы.

20) Экспонента группы. Критерий циклическости абелевой группы. Конечные подгруппы в мультипликативной группе поля.

21) Действие группы на множестве. Примеры действий. Три действия на себе. Связь между действиями и гомоморфизмами в  $S(X)$ . Орбиты и стабилизаторы. Стабилизаторы точек из одной орбиты.

22) Связь между порядком орбиты и порядком стабилизатора. Порядок группы вращений куба. Изоморфизм группы вращений куба и  $S_4$ . Изоморфизм группы симметрий правильного тетраэдра и  $S_4$ .

23) Ядро неэффективности действия. Сведение действия к действию факторгруппы по нормальной подгруппе, лежащей в ядре неэффективности. Изоморфизм действий. Свободные и транзитивные действия. Классификация свободных транзитивных действий. Теорема Кэли.

24) Действие сопряжениями. Централлизаторы и классы сопряженности. Критерий нормальности подгруппы в терминах классов сопряженности. Классы сопряженности в  $S_n$ . Неединичность центра  $p$ -группы. Группы порядка  $p^2$ .

25) Лемма Бернсайда. Пример применения.

26) Коммутатор элементов группы. Коммутант группы. Представление коммутанта как множества произведений коммутаторов. Нормальность коммутанта, фактор по коммутанту. Коммутант – наименьшая нормальная подгруппа, фактор по которой абелев.

27) Коммутанты  $S_n$ ,  $A_n$ ,  $SL_n(F)$  и  $GL_n(F)$  при  $|F| \geq 4$ .

28) Характеристические подгруппы. Транзитивность свойства характеристичности. Характеристичность коммутанта и центра. Нормальность кратных коммутантов.