

ПРОГРАММА КОЛЛОКВИУМА

- 1) Понятие группы. Аддитивные и мультипликативные обозначения. Таблица Кэли. Подгруппа. Проверка, что подмножество является группой. Ассоциативность композиции. Примеры групп.
- 2) Гомоморфизм групп, простейшие свойства гомоморфизмов. Изоморфизм групп. Примеры изоморфизмов. Доказательство, что Q_8 – это группа.
- 3) Ядро и образ гомоморфизма. Критерий инъективности гомоморфизма.
- 4) Простейшие следствия из аксиом (6 штук), в том числе обобщенная ассоциативность, единственность единицы и обратного.
- 5) Автоморфизмы. Группа внутренних автоморфизмов. Группы автоморфизмов групп $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_n$.
- 6) Степень элемента группы. Порядок элемента группы. Порядок степени данного элемента. Циклические группы. Классификация циклических групп. Подгруппы циклических групп.
- 7) Смежные классы по подгруппе. Индекс подгруппы. Теорема Лагранжа и следствия из нее (в том числе теорема Эйлера).
- 8) Нормальные подгруппы. Факторгруппа. Объяснение, почему определение факторгруппы корректно тогда и только тогда, когда подгруппа нормальна. Канонический гомоморфизм.
- 9) Ядро гомоморфизма является нормальной подгруппой. Теорема о гомоморфизме. Связь между порядками ядра и образа.
- 10) Подгруппа, порожденная подмножеством. Подгруппа, порожденная двумя подгруппами, одна из которых нормальна. Вторая теорема о гомоморфизме.
- 11) Третья теорема о гомоморфизме и следствие из нее.
- 12) Центр группы. Изоморфизм между факторгруппой по центру и группой внутренних автоморфизмов. Нециклическость факторгруппы по центру.
- 13) Эквивалентность слов. Свободная группа. Проблема равенства слов.
- 14) Универсальное свойство свободной группы. Нормальное замыкание. Задание группы образующими и соотношениями. Пример: группа Диэдра.
- 15) Внешнее и внутреннее прямое произведение групп. Теорема о факторизации прямого произведения.
- 16) Свободная абелева группа. Ранг свободной абелевой группы. подгруппа свободной абелевой группы. Описание всех базисов через заданный базис.
- 17) Универсальное свойство свободной абелевой группы. Теорема о согласованных базисах. Представление конечнопорожденной абелевой группы в виде суммы циклических.
- 18) Китайская теорема об остатках. Порядок элемента прямого произведения. Теорема о строении конечно порожденных абелевых групп (существование).
- 19) Подгруппа кручения. Теорема о строении конечно порожденных абелевых групп (единственность). Единственность первой канонической формы конечно порожденной абелевой группы.
- 20) Экспонента группы. Критерий циклическости абелевой группы. Конечные подгруппы в мультипликативной группе поля.
- 21) Действие группы на множестве. Примеры действий. Три действия на себе. Связь между действиями и гомоморфизмами в $S(X)$. Орбиты и стабилизаторы. Стабилизаторы точек из одной орбиты.

22) Связь между порядком орбиты и порядком стабилизатора. Порядок группы вращений куба. Изоморфизм группы вращений куба и S_4 . Изоморфизм группы симметрий правильного тетраэдра и S_4 .

23) Ядро неэффективности действия. Сведение действия к действию факторгруппы по нормальной подгруппе, лежащей в ядре неэффективности. Изоморфизм действий. Свободные и транзитивные действия. Классификация свободных транзитивных действий. Теорема Кэли.

24) Действие сопряжениями. Централизаторы и классы сопряженности. Критерий нормальности подгруппы в терминах классов сопряженности. Классы сопряженности в S_n . Неединичность центра p -группы. Группы порядка p^2 .

25) Лемма Бернсайда. Пример применения.

26) Коммутатор элементов группы. Коммутант группы. Представление коммутанта как множества произведений коммутаторов. Нормальность коммутанта, фактор по коммутанту. Коммутант – наименьшая нормальная подгруппа, фактор по которой абелев.

27) Коммутанты S_n , A_n , $SL_n(F)$ и $GL_n(F)$ при $|F| \geq 4$.

28) Характеристические подгруппы. Транзитивность свойства характеристичности. Характеристичность коммутанта и центра. Нормальность кратных коммутантов.

29) Разрешимые группы. Критерий разрешимости. Разрешимость S_n и A_n при $n \leq 4$. Не разрешимость S_n и A_n при $n \geq 5$. Разрешимость группы невырожденных верхнетреугольных матриц.