Лекция 2

Определение 1. Расширенная матрица коэффициентов СЛУ называется *строго ступенчатой*, если она ступенчатая и в каждом столбце за исключением столбца правых частей есть лидер.

Из доказанного на прошлой лекции непосредственно следует, что СЛУ совместна тогда и только тогда, когда нет экзотического уравнения. А совместная система определена тогда и только тогда, когда ступенчатый вид расширенной матрицы коэффициентов является строго ступенчатым.

Определение 2. СЛУ называется *однородной*, если все правые части во всех уравнениях равны нулю.

Замечание 1. Однородная система всегда совместна. Действительно, в качестве решения подходит $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Для однородной СЛУ есть только 2 варианта: либо матрица строго ступенчатая и решение единственное (из всех нулей), либо матрица не строго ступенчатая и решений бесконечно много. Заметим, что ступенчатый вид матрицы заведомо не является строго ступенчатым, если количество строк меньше количества переменных. Получаем следующее утверждение.

Лемма 1. *Если в однородной системе количество уравнений меньше количества переменных, то она обязательно имеет ненулевое решение (то есть решение не из всех нулей).*

Замечание 2. Можно сфформулировать обобщение этой леммы. **Если в совместной системе (над $\mathbb{R}$) количество уравнений меньше количества переменных, то она имеет бесконечное множество решений.** В самом деле, то, что уравнений меньше, чем переменных означает, что существует свободная переменная, так как лидеров не больше, чем строк, то есть количество уравнений, а переменных больше, и следовательно, есть столбец (не правых частей, а соответствующий некоторой переменной), в котором нет лидера. А это означает, что количество решений бесконечно.

Определение 3. Матрица A имеет <u>улучшенный ступенчатый вид</u>, если
1) она имеет ступенчатый вид,
2) лидеры всех строк равны 1,
3) над лидерами в их столбцах стоят нули.

$$\begin{pmatrix}
0 & \ldots & 0 & 1 & *\ldots* & 0 & *\ldots* & 0 & *\ldots* & 0 \\
0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 & *\ldots* & 0 & *\ldots* & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 1 & *\ldots* & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 1 \\
0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\
0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0
\end{pmatrix}$$

К улучшенному ступенчатому виду легко привести элементарными преобразованиями из ступенчатого. Надо разделить каждую ненулевую строку на ее лидера, а затем вычесть более низкие строки из более высоких с подходящими коэффициентами.

Соответственно, мы можем удленнить преобразования расширенной матрицы системы в методе Гаусса и привести ее (элементарными преобразованиями) не только к ступенчатому виду, а к улучшенному степенчатому виду. Далее, если есть экзотическое уравнение, то решений нет. В любом другом случае решения есть. Обратный ход метода Гаусса для матрицы в улучшенном степенчатом виде заключается в перенесении в правую часть всего, кроме (единственной вошедшей в это уравнение) главной переменной.

Теорема 1. *Каждая матрица имеет единственный улучшенный ступенчатый вид. (То есть из каждой матрицы элементарными преобразованиями можно получить ровно одну улучшенную ступенчатую матрицу.)*

Доказательство. Рассмотрим матрицу A. Допустим, она может быть приведена элементарными преобразованиями к двум улучшенным ступенчатым видам B и C. Наша цель – доказать, что $B = C$. Рассмотрим однородную систему с матрицей коэффициентов A. Расширенная матрица коэффициентов $\widetilde{A} = (A|0)$ приводится теми же элементарными преобразованиями к ступенчатым видам $\widetilde{B} = (B|0)$

и $\widetilde{C} = (C|0)$. Это означает, что однородные системы с матрицами коэффициентов B и C эквивалентны.

Пусть $B \neq C$. Отбросим нулевые строки в матрицах $\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$, при этом системы останутся эквивалентными. Будем идти по строкам матриц $\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$ снизу вверх, пока не дойдчм до места, где будет различие. Так как $\widetilde{B} \neq \widetilde{C}$, попадем в один из трех случаев.

1 случай. Строки с первой по $(k-1)$-ю снизу в матрицах $\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$ совпадают, а лидеры k-ой строки снизу в матрицах $\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$ имеют различные позиции. Пусть лидеры стоят в столбцах p и q соответственно. Без ограничения общности считаем, что $p < q$.

Из того, что строки ниже, чем k-е снизу у матриц $\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$ совпадают, следует, что разделение переменных x_i при $i > q$ на главные и свободные в системах $\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$ одинаково. Положим все свободные переменные с номерами $> q$ равными нулю. В системе $(C|0)$ переменная x_q главная, и следовательно (так как система однородная) при указанном задании переменных она также обязательно равна нулю. В системе $(B|0)$ переменная x_q свободная, а потому при указанном задании переменных она может принимать значение 1. Противоречие с эквивалентностью систем $(B|0)$ и $(C|0)$.

2 случай. Строки с первой по $(k-1)$-ю снизу в матрицах $\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$ совпадают, лидеры k-ой снизу строки в матрицах $\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$ имеют одинаковые позиции p, но есть номер $s > p$ такой, что в s-ом столбце в рассматриваемой строке у матриц $\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$ стоят различные числа. Пусть эти числа b и c соответственно. Без ограничения общности $b \neq 0$. Тогда x_s – свободная переменная для системы $(B|0)$, так как в столбцах, соответствующих главным переменным стоят нули за счет улучшенного ступенчатого вида. Но так как более низкие строки в системах $(B|0)$ и $(C|0)$ совпадают, получаем, что x_s – свободная переменная и для системы $(C|0)$. Более того набор свободных переменных с номерами $> p$ у систем одинаков. Положим все свободные переменные с номерами $> p$ кроме x_s равными 0, а $x_s = 1$ (а остальные свободные переменные тоже, например, равными нулю). Тогда $x_p = -b$ для системы $(B|0)$ и $x_p = -c$ для системы $(C|0)$. Это противоречит эквивалентности систем.

3 случай. Проходя снизу вверх по ненулевым строкам матриц $\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$, мы все время видели, что очередные строки совпадают. И строки в одной из матриц (пусть $\widetilde{B}$) закончились, а в другой ($\widetilde{C}$) не закончились. Тогда в матрице $\widetilde{C}$ есть еще одна ненулевая строка, пусть ее лидер стоит в q-ом столбце. Далее рассуждения ровно такие же, как и в первом случае.

Из того, что строки ниже, чем данная, у матриц $\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$ совпадают, следует, что разделение переменных x_i при $i > q$ на главные и свободные в системах $\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$ одинаково. Положим все свободные переменные с номерами $> q$ равными нулю. В системе $(C|0)$ переменная x_q главная, и следовательно (так как система однородная) при указанном задании переменных она также обязательно равна нулю. В системе $(B|0)$ переменная x_q свободная, а потому при указанном задании переменных она может принимать значение 1. Противоречие с эквивалентностью систем $(B|0)$ и $(C|0)$. □

Следствие 1. *Количество ненулевых строк в любом ступенчатом виде данной матрицы одинаково.*

Доказательство. Для любого ступенчатого вида матрицы можно получить улучшенный ступенчатый вид с тем же количеством ненулевых строк. Для этого надо разделить каждую ненулевую строку на ее лидера, а затем вычесть более низкие строки из более высоких с подходящими коэффициентами. Значит, в любом ступенчатом виде столько же ненулевых строк, сколько и в (единственном) улучшенном ступенчатом виде этой матрицы. □

Определение 4. Количество ненулевых строк в ступенчатом виде данной матрицы A называется (ступенчатым) *рангом* матрицы A и обозначается $\mathrm{rk}\, A$.

Замечание 3. В дальнейшем у нас будет еще много других определений ранга матрицы. Мы докажем эквивалентность всех этих определений.

Определение 5. Векторное пространство – это множество V – с двумя операциями: сложением $+\colon V \times V \to V$ и умножение на число $\cdot\colon \mathbb{R} \times V \to V$, которые удовлетворяют следующим аксиомам:

1) для любых $a, b, c \in V$ выполнено $(a+b)+c = a+(b+c)$;
2) существует $\overline{0} \in V$ такой, что для каждого $v \in V$ верно $\overline{0} + v = v + \overline{0} = v$;
3) для каждого $v \in V$ существует $-v \in V$ такой, что $v + (-v) = (-v) + v = \overline{0}$;
4) для любых $a, b \in V$ выполнено $a + b = b + a$;

5) для каждых $\lambda \in \mathbb{R}$ и $v, w \in V$ выполнено $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$;
6) для каждых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ и $v \in V$ выполнено $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$;
7) для каждых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ и $v \in V$ выполнено $(\lambda\mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$;
8) для каждого $v \in V$ выполнено $1 \cdot v = v$.