Лекция 3

Напомним определение с конца предыдущей лекции.

Определение 1. Векторное пространство – это множество V – с двумя операциями: сложением $+\colon V \times V \to V$ и умножение на число $\cdot\colon \mathbb{R} \times V \to V$, которые удовлетворяют следующим аксиомам:

1) для любых $a, b, c \in V$ выполнено $(a + b) + c = a + (b + c)$;
2) существует $\overline{0} \in V$ такой, что для каждого $v \in V$ верно $\overline{0} + v = v + \overline{0} = v$;
3) для каждого $v \in V$ существует $-v \in V$ такой, что $v+(-v) = (-v)+v = \overline{0}$; (элемент $-v$ называется *противоположным* к v.)
4) для любых $a, b \in V$ выполнено $a + b = b + a$;
5) для каждых $\lambda \in \mathbb{R}$ и $v, w \in V$ выполнено $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$;
6) для каждых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ и $v \in V$ выполнено $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$;
7) для каждых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ и $v \in V$ выполнено $(\lambda\mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$;
8) для каждого $v \in V$ выполнено $1 \cdot v = v$.

Замечание 1. В связи с выполнением свойства 4 достаточно требовать только "половину"свойств 2 и 3, то есть $v + \overline{0} = v$ и $(-v) + v = \overline{0}$.

Элементы векторного пространства называются *векторами* (вне зависимости от их природы).

Пример 1. *Геометрические векторы на прямой/на плоскости/в пространстве с обычными операциями сложения векторов и умножения вектора на число образуют векторное пространство.*

Пример 2. *Пространство $\mathbb{R}^n$, которое называется арифметическим пространством или пространством строк – это множество строк*

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R}\},$$

со следующими операциями.

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n);$$
$$\lambda \cdot (a_1, \dots, a_n) = (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n).$$

Пример 3. *Многочлены $\mathbb{R}[x]$ от переменной x с обычными операциями сложения и умножения многочлена на число образуют векторное пространство.*

Пример 4. *Функции на отрезке $[a, b]$ со значениями в $\mathbb{R}$ образуют векторное пространство относительно операций $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ и $(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$.*

Пример 5. *Фиксируем натуральные числа m и n. Матрицы $m \times n$ образуют векторное пространство со следующими операциями*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{21} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

и

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Замечание 2. На самом деле с точки зрения сложения и умножения на число матрица мало отличается от строки (из $\mathbb{R}^{mn}$). Если приставить строки матрицы друг к другу и получить одну длинную строку, то сложение и умножение на чило этих длинных строк будет таким же, как у матриц. Наоборот, строки – это частный случай матриц, то есть матрицы $1 \times n$.

Замечание 3. В каждом из предыдущих примеров вообще говоря нужно проверять, что выполняются аксиомы 1-8. Но все эти проверки очень просты и следуют просто из свойств сложения и умножения чисел. Все мы их делать не будем. Давайте сделаем проверку только для примера 2.

1)$((a_1, \dots, a_n)+(b_1, \dots, b_n))+(c_1, \dots, c_n) = (a_1+b_1, \dots, a_n+b_n)+(c_1, \dots, c_n) = ((a_1+b_1)+c_1, \dots, (a_n+b_n)+c_n) =$
$= (a_1+(b_1+c_1), \dots, a_n+(b_n+c_n)) = (a_1, \dots, a_n)+(b_1+c_1, \dots, b_n+c_n) = (a_1, \dots, a_n)+((b_1, \dots, b_n)+(c_1, \dots, c_n)).$

2) В качестве нулевого вектора можно взять $\overline{0}=(0,0,\dots,0)$. Тогда

$$(a_1,\dots,a_n)+(0,\dots,0)=(a_1+0,\dots,a_n+0)=(a_1,\dots,a_n).$$

3) В качестве противоположного вектора к вектору $(a_1,\dots,a_n)$ подходит вектор $(-a_1,\dots,-a_n)$. Действительно,

$$(-a_1,\dots,-a_n)+(a_1,\dots,a_n)=((-a_1)+a_1,\dots,(-a_n)+a_n)=(0,\dots,0).$$

$$4)(a_1,\dots,a_n)+(b_1,\dots,b_n)=(a_1+b_1,\dots,a_n+b_n)=(b_1+a_1,\dots,b_n+a_n)=(b_1,\dots,b_n)+(a_1,\dots,a_n).$$

$$5)\lambda((a_1,\dots,a_n)+(b_1,\dots,b_n))=\lambda(a_1+b_1,\dots,a_n+b_n)=(\lambda(a_1+b_1),\dots,\lambda(a_n+b_n))=$$
$$=(\lambda a_1+\lambda b_1,\dots,\lambda a_n+\lambda b_n)=(\lambda a_1,\dots,\lambda a_n)+(\lambda b_1,\dots,\lambda b_n)=\lambda(a_1,\dots,a_n)+\lambda(b_1,\dots,b_n).$$

$$6)(\lambda+\mu)(a_1,\dots,a_n)=((\lambda+\mu)a_1,\dots,(\lambda+\mu)a_n)=(\lambda a_1+\mu a_1,\dots,\lambda a_n+\mu a_n)=$$
$$=(\lambda a_1,\dots,\lambda a_n)+(\mu a_1,\dots,\mu a_n)=\lambda(a_1,\dots,a_n)+\mu(a_1,\dots,a_n).$$

$$7)(\lambda\mu)(a_1,\dots,a_n)=((\lambda\mu)a_1,\dots,(\lambda\mu)a_n)=(\lambda(\mu a_1),\dots,\lambda(\mu a_n))=\lambda(\mu a_1,\dots,\mu a_n)=\lambda(\mu(a_1,\dots,a_n)).$$

8) $1\cdot(a_1,\dots,a_n)=(1\cdot a_1,\dots,1\cdot a_n)=(a_1,\dots,a_n)$.

Логика устройства алгебры как науки похожа на логику знакомой вам евклидовой геометрии. Есть некие объекты и аксиомы. Далее верными считаются только те высказывания, которые выводятся из аксиом.

Задача 1. Докажите, что аксиома 8 не выводится из аксиом 1-7.

Указание. Такие задачи обычно решаются следующим способом. Нужно привести пример некой структуры (то есть множества с двумя опрерациями сложения и умножения на число, пусть эти операции и будут заданы возможно странным образом) такой, чтобы выполнялись все аксиомы 1-7, но не выполнялась аксиома 8.

Задача 2. Придумайте a-priori более слабое условие, на которое можно заменить аксиому 8 так, чтобы при выполнении аксиом 1-7 и этого нового условия структура была векторным пространством.

Простейшие следствия из аксиом.

1) В любом векторном пространстве нулевой вектор единственный.

Доказательство. Допустим, что в векторном пространстве V есть два нулевых вектора: $\overline{0}_1$ и $\overline{0}_2$. Тогда $\overline{0}_1=\overline{0}_1+\overline{0}_2=\overline{0}_2$. Первое равенство выполнено так как $\overline{0}_2$ – нулевой вектор, а второе – так как $\overline{0}_1$ – нулевой вектор.

1') Для любого вектора v противоположный вектор $-v$ единственный.

Доказательство. Пусть u и w – два противоположных к вектору v вектора. Имеем

$$u=u+(v+w)=(u+v)+w=w.$$

2) Для любого вектора v выполнено $0\cdot v=\overline{0}$.

Доказательство. (способ 1) Пусть $0\cdot v=w$. Рассмотрим $v+w=1\cdot v+0\cdot v=(1+0)\cdot v=1\cdot v=v$. Теперь к обеим частям равенства $v+w=v$ прибавим вектор $-v$. Получим $w=\overline{0}$.

(способ 2) Имеем $0\cdot v=(0+0)\cdot v=0\cdot v+0\cdot v$. К обеим частям равенства прибавим $-0\cdot v$ и получим $\overline{0}=0\cdot v$.

3) Для любого числа λ выполнено $\lambda\cdot\overline{0}=\overline{0}$. **Упражение:** докажите это утверждение.

4) Для любого вектора v выполнено $(-1)\cdot v=-v$.

Доказательство. $(-1)\cdot v+v=(-1)\cdot v+1\cdot v=(-1+1)\cdot v=0\cdot v=\overline{0}$. Прибавим к обеим частям вектор $-v$ и получим $(-1)\cdot v=-v$.

5) Для любого вектора v выполнено -(-v)=v. **Упражение:** докажите это утверждение.

6) Для любых векторов v и w выполнено $-(v+w)=(-v)+(-w)$. **Упражение:** докажите это утверждение.

7) Если для числа λ и вектора v выполнено $\lambda v = \overline{0}$, то либо $\lambda = 0$, либо $v = \overline{0}$. (Имеется в виду, что может быть и то и другое одновременно.)

Доказательство. Допустим $\lambda \neq 0$. Тогда существует число $\frac{1}{\lambda}$. Имеем

$$\overline{0} = \frac{1}{\lambda}\overline{0} = \frac{1}{\lambda}(\lambda v) = \left(\frac{1}{\lambda}\lambda\right) v = 1 \cdot v = v.$$

Замечание 4. В дальнейшем нулевой вектор мы будем обозначать просто символом 0. Из контекста всегда можно понять, имеется ли в виду нулевое число или нулевой вектор.

Определение 2. Пусть $v_1, \ldots, v_k$ – векторы из векторного пространства V, а $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ – числа. *Линейная комбинация* векторов $v_1, \ldots, v_k$ с коэффициентами $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ – это выражение

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k.$$

Значение этой линейной комбинации – это вектор из V.

Линейная комбинация называется *тривиальной*, если $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$ и нетривиальной иначе (то есть если хотя бы один из коэффициентов не равен нулю).

Определение 3. Система векторов $\{v_1, \ldots, v_k\}$ из векторного пространства называется *линейно зависимой* (ЛЗ), если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулю. Иначе система называется *линейно независимой* (ЛНЗ).

Переформулировка: система $\{v_1, \ldots, v_k\}$ ЛНЗ, если из $\sum \lambda_i v_i = 0$ следует $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$.

Пусть $k = 1$. Система $\{v_1\}$ ЛЗ $\Leftrightarrow$ $v_1 = \overline{0}$.

Пусть $k = 2$. Система $\{v_1, v_2\}$ ЛЗ тогда и только тогда, когда $v_1 = cv_2$ или $v_2 = cv_1$.

Доказательство. Пусть $v_1 = cv_2$. Тогда $1 \cdot v_1 + (-c) \cdot v_2 = 0$ – нетривиальная линейная комбинация. То есть $\{v_1, v_2\}$ ЛЗ. Аналогично, если $v_2 = cv_1$, то $\{v_1, v_2\}$ ЛЗ.

Пусть теперь наоборот $\{v_1, v_2\}$ ЛЗ. То есть существуют $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ такие, что

$$\lambda v_1 + \mu v_2 = 0.$$

Если $\lambda \neq 0$, то

$$v_1 = -\frac{\mu}{\lambda} v_2.$$

Если же $\mu \neq 0$, то

$$v_2 = -\frac{\lambda}{\mu} v_1.$$

Чтобы проверить, верно ли, что $\{v_1, \ldots, v_k\}$, $v_i \in \mathbb{R}^n$ ЛНЗ, нужно приравнять линейную комбинацию $\sum \lambda_i v_i$ к нулю, получить линейную систему и понять, есть ли у нее ненулевое решение.

Пример 6. *Проверим, является ли ЛНЗ система* $\{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, 4, 6)\}$. *Имеем*

$$\lambda_1(1, 1, 1) + \lambda_2(1, 2, 3) + \lambda_3(2, 4, 6) = (\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3, \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3, \lambda_1 + 3\lambda_2 + 6\lambda_3)$$

Получаем систему

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0; \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0; \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 6\lambda_3 = 0. \end{cases} \qquad \text{с матрицей} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 1 & 2 & 4 & | & 0 \\ 1 & 3 & 6 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 1 & 2 & 4 & | & 0 \\ 1 & 3 & 6 & | & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 2 & 4 & | & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Есть свободная неизвестная. $\Rightarrow$ *Есть ненулевое решение.* $\Rightarrow$ *Система ЛЗ.*

Замечание 5. Система всегда получается с матрицей, в которой данные векторы стоят по столбцам.

Свойства линейной зависимости.

Предложение 1. (Свойство 1). *Пусть S и S' – две (конечные) системы векторов такие, что $S \subseteq S'$. Если система S ЛЗ, то система S' ЛЗ.*

Доказательство. Пусть $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ и $S' = \{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1} \ldots v_n\}$. Так как S ЛЗ, существуют $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \neq (0, \ldots, 0)$ такие, что
$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0.$$
Тогда
$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + 0 v_{m+1} + \ldots + 0 v_n = 0.$$
И при этом $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$.

□

Переформулировка. Если S' ЛНЗ, то S ЛНЗ.

Предложение 2. (Свойство 2). *Система $\{v_1, \ldots, v_k\}$ ЛЗ тогда и только тогда, когда существует номер $1 \leq j \leq k$ такой, что v_j равен некоторой линейной комбинации остальных векторов.*

Доказательство. Пусть
$$v_j = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{j-1} v_{j-1} + \lambda_{j+1} v_{j+1} + \ldots + \lambda_k v_k.$$
Тогда
$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{j-1} v_{j-1} + (-1) v_j + \lambda_{j+1} v_{j+1} + \ldots + \lambda_k v_k = 0,$$
то есть $\{v_1, \ldots, v_k\}$ ЛЗ.

Наоборот, пусть $\{v_1, \ldots, v_k\}$ ЛЗ, то есть существует нетривиальная линейная комбинация
$$\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_k v_k = 0.$$
Так как линейная комбинация нетривиальна, существует $\mu_j \neq 0$. Тогда
$$v_j = -\frac{\mu_1}{\mu_j} v_1 - \ldots - \frac{\mu_{j-1}}{\mu_j} v_{j-1} - \frac{\mu_{j+1}}{\mu_j} v_{j+1} - \ldots - \frac{\mu_k}{\mu_j} v_k.$$

□

Если вектор u равен некоторой линейной комбинации векторов $v_1, \ldots, v_k$, то есть существуют такие $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, что
$$u = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k,$$
то говорят, что вектор u *линейно выражается* через векторы $v_1, \ldots, v_k$.

Предложение 3. (Свойство 3. Уточнение свойства 2.) *Пусть система $\{v_1, \ldots, v_k\}$ ЛНЗ и пусть система $\{v_1, \ldots, v_k, w\}$ ЛЗ. Тогда существует единственный набор чисел $\mu_1, \ldots, \mu_k$ такой, что $w = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_k v_k$.*

Доказательство. Так как система $\{v_1, \ldots, v_k, w\}$ ЛЗ, существуют не все нулевые числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \lambda$ такие, что $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k + \lambda w = 0$. Если $\lambda = 0$, то получаем нетривиальную линейную комбинацию $\{v_1, \ldots, v_k\}$, равную 0. Противоречие. Значит, $\lambda \neq 0$. Тогда
$$w = -\frac{\lambda_1}{\lambda} v_1 - \ldots - -\frac{\lambda_k}{\lambda} v_k.$$

Допустим, что $w = \sum \alpha_i v_i = \sum \beta_i v_i$. Тогда
$$0 = \sum \alpha_i v_i - \sum \beta_i v_i = \sum (\alpha_i - \beta_i) v_i.$$
Значит, для каждого j выполнено $\alpha_j = \beta_j$. □

Определение 4. Пусть S – бесконечная система векторов. Линейной комбинацией векторов S называется (конечная) линейная комбинация вида
$$\lambda_1 s_1 + \ldots + \lambda_n s_n,$$
где $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $s_i \in S$.

Далее аналогично случаю конечной системы можно определить тривиальную/нетривиальную линейную комбинацию и ЛЗ/ЛНЗ системы.

Упражнение 1. Докажите свойства 1, 2 и 3 для бесконечных систем векторов.