Лекция 4

Лемма 1 (Основная лемма о линейной зависимости)**.** *Пусть $\{v_1, \ldots, v_n\}$ и $\{w_1, \ldots, w_m\}$ – две системы векторов из векторного пространства V. Допустим, что каждый вектор v_i линейно выражается через систему $\{w_1, \ldots, w_m\}$. Если $n > m$, то система векторов $\{v_1, \ldots, v_n\}$ линейно зависима.*

Доказательство. Так как векторы $v_1, \ldots, v_n$ выражаются через систему $\{w_1, \ldots, w_m\}$, существуют коэффициенты λ_{ij} такие, что

$$v_i = \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij} w_j.$$

Составим линейную комбинацию

$$\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\mu_i \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij} w_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\mu_i \lambda_{ij} w_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} (\mu_i \lambda_{ij} w_j) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i \lambda_{ij} \right) w_j$$

Равенство между 1 и 2 строками выполнено из-за того, что порядок суммирования по двум индексам можно менять. В самом деле: суммирование по i от 1 до n, а затем по j от 1 до m эквивалентно тому, что мы суммируем по всем парам (i, j) из некоторого прямоугольника $m \times n$ сначала по строкам, а затем – по столбцам. Такой же результат получится, если суммировать сперва по столбцам, а затем по строкам, то есть сначала по j от 1 до m а затем по i от 1 до n.

В конце предыдущей формулы мы получили линейную комбинацию векторов w_j. Она уж точно будет равна нулю, если все ећ коэффициенты равны нулю. Докажем, что мы можем подобрать такие не все нулевые $\mu_1, \ldots, \mu_n$, чтобы все коэффициенты $\sum_{i=1}^{n} \mu_i \lambda_{ij}$ были нулевыми. В самом деле это однородная система с коэффициентами λ_{ij} и переменными μ_i. В этой системе n переменных и $m < n$ уравнений. Значит, эта система имеет ненулевое решение $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$. Итак, для этого решения выполнено, что все коэффициенты $\sum_{i=1}^{n} \mu_i \lambda_{ij}$ равны нулю, а значит, $\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n = 0$, то есть система $\{v_1, \ldots, v_n\}$ линейно зависима. □

Определение 1. Подмножество U в векторном пространстве V называется (векторным) *подпространством*, если U с теми же операциями является векторным пространством.

Замечание 1. Прежде, чем проверять то, что выполнены аксиомы, нужно убедиться, что операции на U определены корректно, то есть, что они не выводят за пределы этого подмножества.

Оказывается, что этого достаточно, чтобы подмножество было подпространством.

Теорема 1. *Пусть $U \subset V$ – подмножество в векторном пространстве V. Тогда U – подпространство в V, если и только если выполнены следующие условия*
1) для любых $u_1, u_2 \in U$ выполнено $u_1 + u_2 \in U$;
2) для любых $u \in U$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнено $\lambda u \in U$.

Доказательство. Пусть U – подпространство в V. Тогда сумма двух его элементов лежит снова в U и умножение любого элемента на число лежит в U. (Просто потому, что операции определены на U.)

Наоборот, пусть выполнены условия 1) и 2). Они гарантируют, что на U корректно определены операция сложения и умножения на число.

Аксиомы 1, 4, 5, 6, 7 и 8 сразу следуют из того, что они выполнены на V.

Для выполнения аксиомы 2 нам нужо показать, что $\overline{0}$ (который существует в V) попадает в U. Возьмем $u \in U$. Тогда $0 \cdot u = \overline{0} \in U$.

Проверим выполнение аксиомы 3. Пусть $u \in U$. Тогда $-u = (-1) \cdot u \in U$. □

Теорема 2. *Рассмотрим однородную СЛУ. Множество W ее решений является подпространством в $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Пусть A – матрица коэффициентов нашей СЛАУ. И пусть есть 2 решения $(y_1, \ldots, y_n)$ и $(z_1, \ldots, z_n)$ из W. Это значит, что для каждого j выполняется

$$a_{j1} y_1 + \ldots + a_{jn} y_n = a_{j1} z_1 + \ldots + a_{jn} z_n = 0.$$

Рассмотрим строку $(t_1,\dots,t_n)=(y_1,\dots,y_n)+(z_1,\dots,z_n)=(y_1+z_1,\dots,y_n+z_n)$. Тогда

$$a_{j1}t_1+\ldots+a_{jn}t_n=a_{j1}(y_1+z_1)+\ldots+a_{jn}(y_n+z_n)=$$
$$=(a_{j1}y_1+\ldots+a_{jn}y_n)+(a_{j1}z_1+\ldots+a_{jn}z_n)=0.$$

То есть $(t_1,\dots,t_n)\in W$.

Аналогично. Если $\lambda\in\mathbb{R}$, то обозначим $(s_1,\dots,s_n)=\lambda\cdot(y_1,\dots,y_n)=(\lambda y_1,\dots,\lambda y_n)$. Имеем

$$a_{j1}s_1+\ldots+a_{jn}s_n=a_{j1}\lambda y_1+\ldots+a_{jn}\lambda y_n=\lambda(a_{j1}y_1+\ldots+a_{jn}y_n)=0.$$

То есть $(s_1,\dots,s_n)\in W$. □

Пример 1. *1) В векторном пространстве векторов на плоскости (можно считать, что эти векторы все отложены от начала координат) подпространством является подмножество векторов, лежащих на прямой, проходящей через начало координат.*

2) В векторном пространстве векторов на плоскости не является подпространством подмножество векторов, лежащих на прямой, не проходящей через начало координат.

3) В пространстве $\mathbb{R}^3$ подпространством является множество $U=\{(a,b,0\}$. Можно убедиться в том, что U – подпространство непосредственно, а можно сказать, что оно задано однородной СЛУ, состоящей из одного уравнения $\left\{x_3=0\right.$.

Определение 2. *Линейная оболочка* системы векторов S – это множество всевозможных линейных комбинаций векторв из S. Обозначается линейная оболочка S через $\langle S\rangle$.

$$\langle S\rangle=\left\{\sum_{i=1}^{r}\lambda_i v_i \mid r\in\mathbb{N},\lambda_i\in\mathbb{R},v_i\in S\right\}.$$

Теорема 3. *Пусть S – система векторов в векторном пространстве V. Тогда подмножество $\langle S\rangle\subset V$ является подпространством.*

Доказательство. Пусть $w=\sum\limits_{i=1}^{r}\lambda_i v_i\in\langle S\rangle$, здесь $v_i\in S$. Тогда

$$\alpha\cdot w=\sum_{i=1}^{r}\alpha\lambda_i v_i\in\langle S\rangle$$

Теперь пусть у нас есть две линейные комбинации из $\langle S\rangle$. Без ограничения общности мы можем считать, что в них вошли одинаковые векторы v_i (если в одной из линейных комбинаций вектор не присутствовал, то добавим его туда с коэффициентом ноль.) Имеем $w=\sum\limits_{i=1}^{r}\lambda_i v_i, u=\sum\limits_{i=1}^{r}\mu_i v_i\in\langle S\rangle$. Тогда

$$w+u=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i v_i+\sum_{i=1}^{r}\mu_i v_i=\sum_{i=1}^{r}(\lambda_i+\mu_i)v_i\in\langle S\rangle.$$

□

Пример 2. *Пусть $S=\{(1,0,0),(0,1,0)\}\subset\mathbb{R}^3$. Тогда*

$$\langle S\rangle=\langle(1,0,0),(0,1,0)\rangle=\{\lambda_1(1,0,0)+\lambda_2(0,1,0)\}=\{(\lambda_1,\lambda_2,0)\}=\{x_3=0\}.$$

Определение 3. Подсистема $L\subseteq S$ называется *полной*, если любой вектор из S выражается как линейная комбинация векторов из L.

Переформулировка. $L\subseteq S$ – полная подсистема тогда и только тогда, когда $\langle L\rangle=\langle S\rangle$. В самом деле, так как любой вектор $s\in S$ является линейной комбинацией векторов из L, то линейная комбинация $\sum\lambda_i s_i$ также является линейной комбинацией векторов из L. Надо подставить выражения s_i через элементы L в линейную комбинацию $\sum\lambda_i s_i$ и привести подобные.

Определение 4. Базис системы векторов S – это максимальная по включению линейно независимая подсистема векторов.

Переформулировка. Базис системы векторов S – это подсистема $B\subset S$ такая, что

1) B ЛНЗ.

2) Для каждого $v\in S\setminus B$ выполнено $B\cup\{v\}$ ЛЗ.

Теорема 4. *Пусть B – подсистема векторов в системе S. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *B – базис S;*
(2) *B – ЛНЗ полная подсистема;*
(3) *B – минимальная по включению полная подсистема; (То есть система B полная, но если из нее убрать хотя бы один вектор, она перестанет быть полной.)*
(4) *каждый вектор из S выражается как линейная комбинация векторов из B, причем единственным образом.*

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Пусть B – базис. Тогда B ЛНЗ по определению. Нужно лишь доказать, что B – полная подсистема. Возьмем $v \in S \setminus B$. Тогда система $B \cup \{v\}$ ЛЗ по определению базиса. По свойству 3 линейной зависимости вектор v является линейной комбинацией векторов из B.

$2 \Rightarrow 3$. По условию система B полная. Допустим, что для некоторого $w \in B$ система $B \setminus \{w\}$ также является полной. Но тогда w линейно выражается через элементы $B \setminus \{w\}$. То есть найдутся $e_1, \ldots, e_k \in B$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ такие, что $w = \sum \lambda_i e_i$. Но тогда B линейно зависима по свойству 2 линейной зависимости.

$3 \Rightarrow 4$. Пусть B – минимальная по включению полная подсистема. Тогда по определению полной подсистемы каждый вектор из S линейно выражается через B. Допустим, что есть вектор $v \in S$ такой, что он выражается двумя различными способами:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i, \qquad e_i \in B; \lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}.$$

Получаем $0 = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) e_i$ – нетривиальная линейная комбинация. По свойству 2 найдется e_j, который выражается через остальные. Тогда система $B \setminus \{e_j\}$ полная. В самом деле, Если у нас есть элемент $s \in S$, то так как система B полная, его можно представить как линейную комбинацию векторов из B. Если в эту линейную комбинацию вошел вектор e_j, то подставим его выражение через остальные. Получим линейную комбинацию векторов из $B \setminus \{e_j\}$. Противоречие.

$4 \Rightarrow 1$. Допустим, что B ЛЗ. Тогда по свойству 2 существует $w \in B$, такой, что

$$w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, \qquad e_i \in B \setminus \{w\}, \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Получаем два линейных выражения w через B. Второе имеет вид $w = 1w$. Противоречие. Значит, B ЛНЗ.

Рассмотрим $v \in S \setminus B$. По условию вектор v линейно выражается через B. Тогда по свойству 2 $B \cup \{v\}$ ЛЗ. □

Замечание 2. Особенный интерес для нас представляет ситуация, когда $S = V$. Тогда B – базис векторного пространства V.

Определение 5. По пункту 4 из предыдущей теоремы, если фиксирован базис векторного, то любой вектор v однозначно представляется в виде линейной комбинации базисных векторов. Коэффициенты этого разложения будем называть *координатами* вектора v в базисе B. Если базис конечный и состоит из n векторов, то координаты образуют строку из $\mathbb{R}^n$.

Пример 3.
- *Любой ненулевой вектор e на прямой образует базис. Координата вектора v – это коэффициент пропорциональности v и e.*
- *Любые 2 неколлинеарных вектора на плоскости образуют базис.*
- *Любые 3 некомпланарных вектора в пространстве образуют базис.*
- *Стандартный базис в $\mathbb{R}^n$:*

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1).$$

Координаты вектора $(x_1, \ldots, x_n)$ в этом базисе – это $x_1, \ldots, x_n$.

Докажем, что стандартный базис в самом деле является базисом в $\mathbb{R}^n$. Действительно,

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Если $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0$, то $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. Это доказывает, что $\{e_1, \ldots, e_n\}$ – ЛНЗ система. Пусть теперь нам дан вектор $v = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Тогда $v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$. Это доказывает, что $\{e_1, \ldots, e_n\}$ – полная система. Итак, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ – базис.