Лекция 5

Определение 1. Векторное пространство V называется *конечномерным*, если сущетсвует конечный набор векторов $v_1, \dots, v_k$ такой, что $V = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$.

Далее в течение всего курса, если не оговорено противное, мы будем предполагать все пространства конечномерными.

Лемма 1. *В конечномерном пространстве любую линейно независимую систему можно дополнить до конечного базиса.*

Доказательство. Пусть $V = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$. И пусть $\{e_1, \dots, e_m\}$ – линейно независимая подсистема в V. Тогда, если эта система максимальна по включению, то она базис. Иначе существует $e_{m+1} \in V$ такой, что $\{e_1, \dots, e_m, e_{m+1}\}$ – линейно независимая система. Будем так добавлять векторы в систему пока можем. Бесконечно этот процесс длиться не может, так как по ОЛЛЗ при $m > k$ мы получим линейно зависимую систему. □

Следствие 1. *Любое ненулевое конечномерное пространство имеет конечный базис.*

Доказательство. Возьмем систему $\{e \neq 0\}$ и дополним ее до базиса. □

Определение 2. *Рангом* подсистемы $S \subset V$ (в конечномерном пространстве V) называется количество $\operatorname{rk} S$ векторов в ее базисе.

Теорема 1. *Ранг определен корректно. То есть если $\{e_1, \dots, e_n\}$ – базис S, то в любом другом базисе S тоже n векторов.*

Доказательство. Пусть B – другой базис S. Тогда, если $|B| > n$, то векторы из B зависимы по ОЛЛЗ. Наоборот, если $n > |B|$, то векотры $\{e_1, \dots, e_n\}$ зависимы по ОЛЛЗ. □

Определение 3. Пусть V – векторное пространство. Тогда ранг системы V называется <u>размерностью</u> векторного пространства V. И оборзначается $\dim V$.

Пример 1. $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Замечание 1. Ранг системы векторов S равен размерности ее линейной оболочки. В самом деле, если B – базис S, то B – базис $\langle S \rangle$. Докажем это. Так как B – базис S, эта система ЛНЗ. С другой стороны, каждый элемент $\langle S \rangle$ – это линейная комбинация элементов $s_1, \dots, s_k \in S$. В свою очередь каждый s_i – это линейная комбинация $b_1, \dots, b_n$. Подставляя одни выражения в другие, получаем, что каждый элемент $\langle S \rangle$ – это линейная комбинация элементов из B. То есть B – полная система. Значит, B – базис $\langle S \rangle$.

Пусть A – матрица $m \times n$.

Определение 4. *Строчным рангом* A называется ранг системы ее строк в $\mathbb{R}^n$. Аналогично, *столбцовым рангом* A называется ранг системы ее столбцов в $\mathbb{R}^m$.

Напомним, что рангом (ступенчатым рангом) матрицы A мы называли число ненулевых строк в ее ступенчатом виде.

Теорема 2. *Для любой матрицы A ее строчный, столбцовый и ступенчатый ранги совпадают.*

Доказательство. Доказательство теоремы следует из следующих двух лемм.

Лемма 2 (Лемма А)**.** *Каждый вид ранга (строчный, столбцовый, ступенчатый) не меняется при элементарных преобразованиях строк.*

Лемма 3 (Лемма Б)**.** *Для улучшенной ступенчатой матрицы все три вида ранга совпадают.*

В самом деле, мы знаем, что любую матрицу можно привести к улучшенному ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк. При этих преобразованиях каждый вид ранга не меняется. А в конце они совпадают. Значит, они изначально совпадали. □

Теперь докажем эти две леммы.

Доказательство леммы А. Докажем то, что ранг не меняется при элементарных преобразованиях строк отдельно для каждого вида ганга. Сперва докажем это для строчного ранга матрицы. При элементарном преобразовании строк мы переходим от матрицы A к матрице A'. Заметим, что строки A' – линейные комбинации строк A. В самом деле, почти все строки матрицы A' просто совпадают со строками матрицы A. Для преобразования 1 типа есть только одна строка A', которая не совпадает со строкой A, то она является линейной комбинацией двух строк A. Для элементарного преобразования 2 типа все строки сохраняются, просто меняется их порядок. При элементарном преобразовании 3 типа одна строка умножается на $c \neq 0$. При этом данная строка A' снова линейная комбинация строк A (в эту линейную комбинацию входит только 1 строка). Пусть B – базис системы строк матрицы A, а B' – базис системы строк матрицы A'. Тогда каждый вектор из B' линейно выражается через B. Так как B' ЛНЗ по ОЛЛЗ выполнено $|B'| \leq |B|$ (неравенство на количество векторов в базисах). Однако, так как элементарные преобразования обратимы и обратные к ним также элементарные преобразования, выполнено и противоположное неравенство $|B| \leq |B'|$. Отсюда $|B'| = |B|$, то есть строковый ранг A и A' совпадает.

Докажем, что столбцовый ранг не меняется при элементарных преобразованиях. Пусть столбцы $A^{(i_1)}, \ldots, A^{(i_k)}$ – базис системы столбцов матрицы A. Покажем, что столбцы $A'^{(i_1)}, \ldots, A'^{(i_k)}$ образуют базис системы столбцов матрицы A'. Для этого докажем, что если выполнено

$$\lambda_1 A^{(1)} + \ldots + \lambda_n A^{(n)} = 0,$$

то выполнено и

$$\lambda_1 A'^{(1)} + \ldots + \lambda_n A'^{(n)} = 0.$$

В самом деле равенство

$$\lambda_1 A^{(1)} + \ldots + \lambda_n A^{(n)} = 0$$

означает, что для каждого i выполнено

$$\lambda_1 a_{i1} + \ldots + \lambda_n a_{in} = 0.$$

Если элементарное преобразование, переводящее A в A' не затрагивало i-ю строку, то равенство

$$\lambda_1 a'_{i1} + \ldots + \lambda_n a'_{in} = 0$$

также будет верным. Если это было элементарное преобразование 2 типа, то строки и данные равенства переставились, но остались верными для всех i. Если это было элементарное преобразование 3 типа, то равенство $\lambda_1 a'_{i1} + \ldots + \lambda_n a'_{in} = 0$ получается из аналогичного для матрицы A умножением на c. Пусть теперь A переводится в A' элементарным преоразованием 1 типа, которое прибавляет j-ю строку с оэффициентом λ к i-ой. Тогда

$$\begin{aligned}\lambda_1 a'_{i1} + \ldots + \lambda_n a'_{in} = \lambda_1(a_{i1} + \lambda a_{j1}) + \ldots + \lambda_n(a_{in} + \lambda a_{jn}) = \\ = \lambda_1 a_{i1} + \ldots + \lambda_n a_{in} + \lambda(\lambda_1 a_{j1} + \ldots + \lambda_n a_{jn}) = 0.\end{aligned}$$

Итак, в любом случае мы доказали, что из равенства

$$\lambda_1 A^{(1)} + \ldots + \lambda_n A^{(n)} = 0,$$

следует равенство

$$\lambda_1 A'^{(1)} + \ldots + \lambda_n A'^{(n)} = 0.$$

Однако, так как элементарные преобразования обратимы и обратные также являются элементарными преобразованиями, из равенства

$$\lambda_1 A'^{(1)} + \ldots + \lambda_n A'^{(n)} = 0,$$

следует равенство

$$\lambda_1 A^{(1)} + \ldots + \lambda_n A^{(n)} = 0.$$

Сформулируем это так: система столбцов в матрице A' линейно зависима тогда и только тогда, когда система столбцов с стеми же номерами в матрице A линейно зависима. Отсюда следует, что максимальная линейно независимая система столбцов в обеих матрицах состоит из одинаковог о количества столбцов. То есть столбцовые ранги у A и A' совпадают.

Докажем, что у матриц A и A' совпадают ступенчатые ранги. Пусть B – ступенчатый вид матрицы A. Тогда матрицу B можно получить из матрицы A' путем элементарных преобразований: нужно сперва сделать элементарное преобразование и получить из A' матрицу A, а затем с помощью элементарных преобразований получить B. Таким образом ступенчатый ранг обеих матриц A и A' равен количеству ненулевых строк в матрице B. □

Доказательство леммы Б. Пусть M – матрица в улучшенном ступенчатом виде. Строчный ранг матрицы M – количество строк в базисе системы строк. Ясно, что в базисе не может быть нулевой строки, так как базис – ЛНЗ система. Докажем, что все ненулевые строки M образуют линейно независимую систему. Тогда система из всех ненулевых строк будет максимальной ЛНЗ подсистемой в системе строк M, а значит, базисом системы строк M. Рассмотрим линейную комбинацию

$$v = \lambda_1 M_1 + \ldots + \lambda_r M_r$$

всех ненулевых строк матрицы M. Пусть лидер i-ой строки M стоит в j-ом столбце. Тогда в остальных строках в j-ом столбце стоят нули. Значит, в векторе v на j-ом месте стоит λ_j. Если $v = 0$, то $\lambda_j = 0$. Так как это верно для каждого j, получаем, что ненулевые строки M линейно независимы. Итак, в базисе системы строк M столько же строк, сколько ненулевых строк в ступенчатом виде M, то есть в самой матрице M. Это значит, что строковый и ступенчатый ранги матрицы M совпадают. Обозначим это число за r.

Рассмотрим теперь столбцы матрицы M. Начиная с $(r+1)$-го места в каждом столбце M стоят нули. Рассмотрим столбцы M, которые проходят через лидеры строк. Эти стобцы имеют вид

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

где единица стоит на 1-ом, 2-ом, ..., r-ом месте. Линейная комбинация данных столбцов с коэффициентами $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ равна

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $\sum \lambda_i e_i = 0$ тогда и только тогда, когда все λ_i равны нулю. То есть $\{e_1, \ldots, e_r\}$ – линейно независимая система. С другой стороны любой столбец матрицы M имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

а потому линейно выражается через $e_1, \ldots, e_r$. Таким образом $\{e_1, \ldots, e_r\}$ – полная подсистема в системе столбцов M. Итак, $\{e_1, \ldots, e_r\}$ – базис системы столбцов M. Отсбда столбцовый ранг M равен r, то есть совпадает со строчным и ступенчатым рангом. □