Лекция 6

Лемма 1. *Из любой конечной полной подсистемы в системе S (в которой есть ненулевой вектор) можно выбрать базис системы S.*

Доказательство. Воспользуемся тем, что базис – это минимальная по включению полная система. Пусть нам дана полная конечная система $\{v_1, \dots, v_n\}$. Если ее можно уменьшить (выкинуть один из векторов) так, чтобы система осталась полной, то сделаем это. Иначе наша система минимальная полная, а значит, это базис. Далее снова либо уже получился базис, либо можно еще уменьшить нашу систему и т.д. Так как система конечна, мы не можем ее бесконечно уменьшать. Значит, через конечное число шагов мы дойдем до непустой (так как в S был ненулевой вектор) минимальной по включению полной системы, то есть до базиса. $\square$

Замечание 1. Если система S состоит только из нулевых векторов, то будем считать, что базис S состоит из пустого множества векторов. В самом деле, это множество подходит под определение, что базис – минимальная по включению ЛНЗ система векторов. Под остальные определения оно подойдет, если считать, что пустая линейная комбинация векторов равна нулевому вектору.

Определение 1. Пусть A – матрица $m \times n$. Матрица $B = A^T$ размера $n \times m$ называется <u>транспонированной</u> к матрице A, если

$$b_{ij} = a_{ji}.$$

Ясно, что $(A^T)^T = A$.

Лемма 2. *Выполнено равенство* $\operatorname{rk} A^T = \operatorname{rk} A$.

Доказательство. Столбцы A^T – это строки A. Соответственно, ранг системы столбцов A^T равен рангу системы строк A. $\square$

Определение 2. *Элементарные преобразования столбцов* – это преобразования, аналогичные элементарным преобразованиям строк, сделанные со столбцами. А именно:

1 тип: прибавляем i-й столбец к j-му с коэффициентом λ. (Все столбцы, кроме j-го не меняются.)

2 тип: меняем i-й и j-й столбцы местами.

3 тип: умножаем один столбец на ненулевое число.

Теорема 1 (Свойства ранга)**.** *Пусть A – матрица $m \times n$. Тогда*

- $\operatorname{rk} A \leq m$*;*
- $\operatorname{rk} A \leq n$*;*
- $\operatorname{rk} A$ *не меняется при элементарных преобразованиях строк и столбцов.*
- *Если к матрице добавить k столбцов (строк), то ранг а) не уменьшится, б) увеличится не более, чем на k.*

Доказательство. 1) Ранг A равен рангу системы строк A, то есть равен максимальному числу ЛНЗ строк в матрице A. Это число не может быть больше, чем количество строк в матрице A, то есть m.

2) Ранг A равен рангу системы столбцов A, то есть равен максимальному числу ЛНЗ столбцов в матрице A. Это число не может быть больше, чем количество столбцов в матрице A, то есть n.

3) То, что ранг не меняется при элементарных преобразованиях строк уже обсуждалось ранее (на прошлой лекции). Для того, чтобы доказать, что ранг не меняется при элементарных преобразованиях столбцов скажем, что элементарное преобразование столбцов матрицы A равно композиции транспонирования, элементарного преобразования строк матрицы A^T и еще одного транспонирования. При каждом из действий ранг матрицы не меняется.

4) Пусть к матрице A прибавили k строк и получили матрицу B. Пусть строки $A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$ образовывали базис системы строк A. Тогда $r = \operatorname{rk} A$. Рассмотрим систему строк матрицы B, которая состоит из строк $A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$ и всех добавленных строк. Это полная система из $r + k$ строк. В самом деле, любая строка из A выражается через строки $A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$, а любая добавленная строка содержится в нашей системе. По лемме из этой полной системы можно выбрать базис. В нем будет не более, чем $r + k$ векторов. Таким образом, $\operatorname{rk} B \leq \operatorname{rk} A + k$.

Утверждение для столбцов сводится к утверждению для строк транспонированием. $\square$

Теорема 2 (Теорема (Кронекер-Капелли))**.** *СЛУ совместна тогда и только, когда ранг матрицы коэффициентов A равен рангу расширенной матрицы коэффициентов $\widetilde{A}$.*

Доказательство. Приведчм матрицу $\widetilde{A}$ к улучшенному ступенчатому виду. Оба ранга при этом не поменяются. В ступенчатом виде ранг равен количеству ненулевых строк. Как следует из свойств ранга, ранг $\widetilde{A}$ либо равен рангу A, либо на 1 больше. Если $\operatorname{rk}\widetilde{A} = \operatorname{rk} A + 1$, то в ступенчатом виде будет экзотическое уравнение и система несовместна. Если же $\operatorname{rk}\widetilde{A} = \operatorname{rk} A$, то экзотического уравнения нет и система совместна. □

Теорема 3 (критерий определенности СЛУ). *СЛУ определена тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rk}\widetilde{A} = \operatorname{rk} A = n$*, где* n *– количество переменных.*

Доказательство. Если СЛУ определена, то она совместна (и значит, $\operatorname{rk}\widetilde{A} = \operatorname{rk} A$) и ступенчатый вид матрицы является строго ступенчатым, то есть количество ступенек (оно же ранг) равно количеству переменных. □

Определение 3. Рассмотрим однородную СЛУ. Фундаментальная система решений (ФСР) этой СЛУ – это базис пространства решений.

Алгоритм построения ФСР Каждое решение задается значениями свободных неизвестных, которые могут быть любыми. Рассмотрим решения, свободные неизвестные которых принимают значения $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$. Главные переменные при этом будут принимать значения противоположные к соответсвующему столбцу. Количество векторов в ФСР равно количеству свободных неизвестных.

Пример 1. *Пусть улучшенный ступенчатый вид расширенной матрицы системы имеет вид*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 4 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Свободные неизвестные – это x_2, x_3 *и* x_6*. ФСР имеет вид*

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Объяснение, почему алгоритм работает Данная система является линейно независимой, так как на месте i-ой свободной переменной в одном векторе 1, а в остальных – ноль. Если рассмотреть линейную комбинацию векторов из данной системы с коэффициентами $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, то коэффициент при i-ой свободной переменной будет λ_i. Следовательно, данная линейная комбинация равна нулю тогда и только тогда, когда все коэффициенты равны нулю.

Данная система $\{v_1, \dots, v_k\}$ полная. Покажем, что любое решение есть линейная комбинация данных. Рассмотрим решение u, у которого значения свободных переменных равны $a_1, \dots, a_k$. Покажем, что $u = a_1 v_1 + \ldots + a_k v_k$. В самом деле, u и $a_1 v_1 + \ldots + a_k v_k$ – два решения, у которых значения свободных переменных одинаковы. Так как главные переменные однозначно выражаются через свободные, то значения всех переменных совпадают.

Следствие 1. *Рассмотрим однородную систему с матрицей* A*. Размерность пространства решений равна* $n - \operatorname{rk} A$*, где* n *– количество переменных.*

Доказательство. Размерность пространства решений равна мощности ФСР, что равно количеству свободных переменных, то есть n минус количество главных переменных. А количество главных переменных равно количеству ступенек в ступенчатом виде матрицы, то есть ранг A. □

Структура решений неоднородной СЛАУ

Рассмотрим СЛУ с матрицей коэффициентов A и с правой частью b. Пусть $Z = (z_1, \dots, z_n)$ – некоторое частное решение. Тогда для любого решения $X = (x_1, \dots, x_n)$ ассоциированной с данной однородной системы (то есть однородной системы с той же матрицей коэффициентов), вектор $X + Z$ является решением неоднородной системы. Действительно

$$\sum a_{ij} x_j = 0, \sum a_{ij} z_j = b_i, \text{ следовательно} \sum a_{ij}(x_j + z_j) = b_i.$$

Напротив, если $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ – решение неоднородной системы, то $Y - Z$ – решение ассоциированной однородной.

Получаем следующее утверждение.

Предложение 1. *Если неоднородная система линейных уравнений совместна, то общее решение неоднородной системы есть сумма частного решения этой неоднородной системы плюс общее решение ассоциированной однородной системы.*

Геометрически. Множество решений неоднородной системы – это пространство решений однородной системы, смещенное на вектор частного решения неоднородной системы.