Лекция 7

Определение 1. Отображение φ из векторного пространства U в векторное пространство V называется *линейным*, если

1) $\varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$;

2) $\varphi(\lambda u) = \lambda\varphi(u)$.

Пример 1. *1) Отображение в ноль.*

2) $U = V$, умножение на число. (В том числе, если число равно 1, то получаем тождественное отображение id.*)*

3) $U = V = \{$множество векторов на плоскости$\}$. Поворот относительно начала координат.

4) $U = V = \{$множество векторов в пространстве$\}$. Симметрия относительно плоскости, содержащей начала координат.

5) $U = \{$множество векторов на плоскости$\}$, $V = \{$множество векторов на прямой$\}$. Ортогональная проекция на ось OX.

6) $U = \mathbb{R}^2$, $V = \mathbb{R}^5$, $\varphi(x, y) = (x, y, x + y, 0, x)$.

7) $U = V = \mathbb{R}[x]$ – векторное пространство многочленов с коэффициентами из $\mathbb{R}$ от переменной x. Отображение диффференцирования $\varphi(f(x)) = f'(x)$.

Определение 2. *Изоморфизм* векторных пространств – это биективное линейное отображение. Если между U и V есть изоморфизм, то эти пространства называются *изоморфными*.

Изоморфные пространства являются одинаковыми с алгебраической точки зрения. То есть если их отождествить по данному изоморфизму (не различать u и $\varphi(u)$), то операции совпадут.

Возникает вопрос, насколько много существует конечномерных векторных пространств с точностью до изоморфизма?

Теорема 1. *Любое n-мерное векторное пространство изоморфно $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Пусть U – векторное пространство с базисом $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Тогда любой вектор $u \in U$ однозначно записывается в виде $\sum x_i e_i$. Рассмотрим $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$, $u \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$. Докажем, что φ – изоморфизм.

Сперва докажем, что φ – линейное отображение. Пусть $u_1 = \sum x_i e_i$, $u_2 = \sum y_i e_i$. Тогда $u_1 + u_2 = \sum x_i e_i + \sum y_i e_i = \sum (x_i + y_i) e_i$. Следовательно,

$$\varphi(u_1 + u_2) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) = (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2).$$

Аналогично $\lambda u_1 = \lambda \sum x_i e_i = \sum \lambda x_i e_i$

$$\varphi(\lambda u_1) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda(x_1, \ldots, x_n) = \lambda\varphi(u_1).$$

Итак, мы доказали, что φ – линейное отображение.

Теперь докажем, что φ – биекция. Для доказательства этого факта нам нужно доказать инъективность и сюръективность φ. Допустим, что φ не инъективно. Тогда существуют $u_1 \neq u_2$ такие, что $\varphi(u_1) = \varphi(u_2)$. Пусть $\varphi(u_1) = \varphi(u_2) = (x_1, \ldots, x_n)$. Тогда $u_1 = \sum x_i e_i = u_2$. Противоречие. Значит, φ – инъекция.

Докажем, что φ – сюръекция. Для этого надо найти прообраз для любого вектора $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. По определению φ выполнено

$$\varphi\left(\sum x_i e_i\right) = (x_1, \ldots, x_n).$$

Итак, φ – инъекция и сюръекция. То есть φ – биекция. $\square$

Пусть $\varphi\colon U \to V$ – линейное отображение. Фиксируем базис $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ в U и $f = \{f_1, \ldots, f_m\}$ в V. Тогда $\varphi(e_i) \in V$, а значит, существуют коэффициенты a_{ij} такие, что

$$\varphi(e_i) = a_{1i} f_1 + \ldots + a_{mi} f_m.$$

Скажем, что матрица $(a_{ij}) = A = A(\varphi, e, f)$ – это *матрица линейного отображения φ в базтсах e и f*. В матрице A по столбцам стоят координаты в базисе f образов базисных векторов из e.

Пример 2. *Рассмотрим следующий пример: пусть $U = V$ – пространство векторов на плоскости. Пусть e_1 – единичный вектор вдоль оси Ox, а e_2 – единичный вектор вдоль оси Oy. И пусть $\varphi\colon U \to V = U$ – поворот на угол α (в направлении от оси Ox к оси Oy). Тогда образ вектора e_1 – это вектор с координатами $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ в базисе $\{e_1, e_2\}$. Аналогично образ вектора e_2 – это вектор с* *координатами* $(-\sin\alpha, \cos\alpha)$ *в базисе* $\{e_1, e_2\}$. *Таким образом матрица данного поворота в базисах* $e = \{e_1, e_2\}$ *и* $e = \{e_1, e_2\}$ *равна*

$$A(\varphi, e, e) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Операции с линейными отображениями Пусть $\varphi\colon U \to V$, $\psi\colon U \to V$, $\xi\colon V \to W$. Тогда определены следующие операции.

- Сумма линейных отображений φ и ψ. По определению $(\varphi+\psi)(u) = \varphi(u) + \psi(u)$. Надо проверить, что отображение $\varphi+\psi$ линейно. В самом деле

$$(\varphi+\psi)(u_1+u_2) = \varphi(u_1+u_2) + \psi(u_1+u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2) + \psi(u_1) + \psi(u_2) = (\varphi+\psi)(u_1) + (\varphi+\psi)(u_2),$$

$$(\varphi+\psi)(\lambda u) = \varphi(\lambda u) + \psi(\lambda u) = \lambda\varphi(u) + \lambda\psi(u) = \lambda(\varphi+\psi)(u).$$

- Произведение линейного отображения на число. По определению $(c\varphi)(u) = c \cdot (\varphi(u))$. Проверим, что $c\varphi$ линейно.

$$c\varphi(u_1+u_2) = c(\varphi(u_1+u_2)) = (\varphi(u_1) + \varphi(u_2)) = c\varphi(u_1) + c\varphi(u_2).$$

$$c\varphi(\lambda u) = c(\varphi(\lambda u)) = (\lambda\varphi(u)) = c\lambda\varphi(u) = \lambda(c\varphi(u_2)).$$

- Композиция линейных отображений. $\xi \circ \varphi(u) = \xi(\varphi(u))$. Проверяем линейность:

$$\xi \circ \varphi(u_1+u_2) = \xi(\varphi(u_1+u_2)) = \xi(\varphi(u_1) + \varphi(u_2)) = \xi(\varphi(u_1)) + \xi(\varphi(u_2)) = \xi \circ \varphi(u_1) + \xi \circ \varphi(u_2),$$

$$\xi \circ \varphi(\lambda u) = \xi(\varphi(\lambda u)) = \xi(\lambda\varphi(u)) = \lambda\xi(\varphi(u)) = \lambda\left(\xi \circ \varphi(u)\right).$$

Операции над матрицами. Проследим за матрицами линейных отображений при операциях. Пусть фиксированы базисы $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ в U, $f = \{f_1, \ldots, f_m\}$ в V и $s = \{s_1, \ldots, s_k\}$ в W. Пусть в этих базисах отображения имеют матрицы $A = A(\varphi, e, f)$, $B = A(\psi, e, f)$, $C = A(\xi, f, s)$. Обозначим $A + B = A(\varphi+\psi, e, f)$, $\lambda A = A(\lambda\varphi, e, f)$, $CA = A(\xi \circ \varphi, e, s)$.

- Сложение.

$$(\varphi+\psi)(e_i) = \varphi(e_i) + \psi(e_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} f_j + \sum_{j=1}^{m} b_{ji} f_j = \sum_{j=1}^{m} (a_{ji} + b_{ij}) f_j.$$

  Таким образом

$$(A+B)_{ji} = a_{ji} + b_{ji}.$$

- Умножение на число.

$$(\lambda\varphi)(e_i) = \lambda\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ji} f_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \lambda a_{ji} f_j, \text{ то есть } (\lambda A)_{ji} = \lambda a_{ji}.$$

- Умножение.

$$\xi \circ \varphi(e_i) = \xi\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ji} f_j\right) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \xi(f_j) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\left(\sum_{p=1}^{k} c_{pj} s_p\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{k} a_{ji} c_{pj} s_p = \sum_{p=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{m} c_{pj} a_{ji}\right) s_p$$

  Таким образом,

$$(CA)_{pi} = \sum_{j=1}^{n} c_{pj} a_{ji}.$$

Итак, две матрицы X и Y можно умножить тогда и только тогда, когда X имеет размеры $k \times m$, а Y – $m \times n$. При произведении этих матриц получится матрица Z размера $k \times n$ и при этом

$$z_{ij} = \sum_{l=1}^{k} x_{il} y_{lj}.$$

Пример 3.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -2 & -3\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 4\\ -1 & 5 & 3\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}1{\cdot}(-1)+2{\cdot}1+3{\cdot}0+4{\cdot}(-1) & 1{\cdot}(-2)+2{\cdot}1+3{\cdot}2+4{\cdot}5 & 1{\cdot}(-3)+2{\cdot}1+3{\cdot}4+4{\cdot}3\\ 5{\cdot}(-1)+6{\cdot}1+7{\cdot}0+8{\cdot}(-1) & 5{\cdot}(-2)+6{\cdot}1+7{\cdot}2+8{\cdot}5 & 5{\cdot}(-3)+6{\cdot}1+7{\cdot}4+8{\cdot}3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-3 & 26 & 23\\ -7 & 50 & 43\end{pmatrix}$$

Введем обозначение $0 = \begin{pmatrix}0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$

Свойства операций над матрицами

1) $(A+B)+C = A+(B+C)$
2) $A+0 = 0+A = A$
3) для каждой A есть $-A$ такая, что $A+(-A) = (-A)+A = 0$
4) $A+B = B+A$,
5) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$,
6) $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$,
7) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$,
8) $1 \cdot A = A$.

Таким образом с операциями сложения и умножения на число матрицы $m \times n$ образуют векторное пространство. Легко видеть, что базисом этого векторного пространства является набор матриц E_{ij}, где E_{ij} имеет один ненулевой элемент, он равен 1 и стоит на месте (i, j). Таким образом

$$\dim \mathrm{Mat}_{m,n} = mn.$$