Лекция 9

Теорема 1. *Пусть A и B – матрицы одинакового размера. Тогда*

$$\operatorname{rk}(A+B) \le \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B.$$

Доказательство. Пусть $\{A_1, \dots, A_r\}$ и $\{B_1, \dots, B_s\}$ – базисы систем строк матриц A и B соответственно. Тогда каждая строка матрицы $A+B$ – это линейная комбинация строк $A_1, \dots, A_r, B_1, \dots, B_s$. По ОЛЛЗ базис системы строк матрицы $A+B$ не может быть больше, чем из $r+s$ векторов. □

Замечание 1. Данная оценка достигается. Например,

$$\operatorname{rk}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = 2 = 1 + 1 = \operatorname{rk}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \operatorname{rk}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Задача 1. Докажите, что $\operatorname{rk}(A+B) \ge |\operatorname{rk} A - \operatorname{rk} B|$.

Непосредственным умножением матриц, легко получить следующую лемму.

Лемма 1.

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & \dots & \lambda_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots\\ a_{i1} & \dots & a_{in}\\ \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_i a_{i1} & \dots & \lambda_i a_{in}\end{pmatrix}.$$

Следствие 1. *Пусть $A_1, \dots, A_m$ – строки некоторой матрицы (каждое A_i – вектор). Тогда*

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & \dots & \lambda_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_m\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^m \lambda_i A_i.$$

Доказательство.

$$\begin{pmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_m\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^m \begin{pmatrix}0\\ A_i\\ 0\end{pmatrix}$$

Получаем

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & \dots & \lambda_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & \dots & \lambda_m\end{pmatrix}\left(\sum_{i=1}^m \begin{pmatrix}0\\ A_i\\ 0\end{pmatrix}\right) = \sum_{i=1}^m \begin{pmatrix}\lambda_1 & \dots & \lambda_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ A_i\\ 0\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^m \lambda_i A_i.$$

□

Аналогично доказывается следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$ – столбцы некоторой матрицы (каждое $A^{(i)}$ – вектор-столбец). Тогда*

$$\begin{pmatrix}A^{(1)} & \dots & A^{(n)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \lambda_i A^{(i)}.$$

Получено следующее утверждение.

Предложение 1. *Столбцы матрицы AB – это линейные комбинации столбцов матрицы A с коэффициентами из столбцов матрицы B. Строки матрицы AB – это линейные комбинации строк матрицы B с коэффициентами из строк матрицы A.*

Доказательство. При умножении матрицы A на матрицу B, матрица A умножается на каждый столбец, а затем составляется матрица из полученных столбцов.

Аналогично, B умножается на каждую строку матрицы A, а затем составляется матрица из полученных строк. □

Пример 1. *Рассмотрим произведение матриц*

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\\ 10 & 11 & 12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 4\\ 26 & 10\\ 41 & 16\\ 56 & 22\end{pmatrix}.$$

Обозначим эти матрицы так, чтобы это равенство имело вид $AB = C$. Рассмотрим, например, 3-ю строку матрицы C. Она есть линейная комбинация строк B с коэффициентами из 3-й строки A. В самом деле:

$$(41, 16) = 7(1, -1) + 8(2, 4) + 9(2, -1).$$

Рассмотрим, например, 1-й столбец матрицы C. Он есть линейная комбинация столбцов A с коэффициентами из 1-го столбца B. В самом деле:

$$\begin{pmatrix}11\\ 26\\ 41\\ 56\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\ 4\\ 7\\ 10\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}2\\ 5\\ 8\\ 11\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}3\\ 6\\ 9\\ 12\end{pmatrix}.$$

Теорема 2. *Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ и $B \in \mathrm{Mat}_{n,k}(\mathbb{R})$. Тогда*

$$\operatorname{rk}(AB) \le \min\{\operatorname{rk} A, \operatorname{rk} B\}.$$

Доказательство. Нам нужно доказать, что $\operatorname{rk}(AB) \le \operatorname{rk} A$ и что $\operatorname{rk}(AB) \le \operatorname{rk} B$.

Докажем первое неравенство. Так как столбцы AB – это линейные комбинации столбцов A, то базис системы столбцов матрицы AB выражается через базис системы столбцов матрицы A. Если бы в базисе системы столбцов матрицы AB было бы больше элементов, чем в базисе системы столбцов матрицы A, мы бы получили противоречие с ОЛЛЗ. Таким образом, $\operatorname{rk}(AB) \le \operatorname{rk} A$.

Второе неравенство доказывается аналогично, только рассматривать надо строки. □

Замечание 2. Второе неравенство может быть выведено из первого используя тот факт, что при транспонировании ранг не меняется. В самом деле

$$\operatorname{rk}(AB) = \operatorname{rk}(AB)^T = \operatorname{rk}(B^T A^T) \le \operatorname{rk} B^T = \operatorname{rk} B.$$

Задача 2. Пусть A – матрица $m \times n$ и B – матрица $n \times k$. Тогда $\operatorname{rk}(AB) \ge \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B - n$.

Напомним определения.

Определение 1. Пусть A – матрица $m \times n$. Матрица B размера $n \times m$ называется *левой обратной* к матрице A, если $BA = E$.

Матрица B размера $n \times m$ называется *правой обратной* к матрице A, если $AB = E$.

Матрица B размера $n \times n$ называется *(двустороней) обратной* к матрице A, если она и левая и правая обратная к A.

Теорема 3. *Левая обратная к матрице A существует тогда и только тогда, когда $\operatorname{rk} A = n$. Если $m = n$ и левая обратная к матрице A существует, то она единственна. Правая обратная к матрице A существует тогда и только тогда, когда $\operatorname{rk} A = m$. Если $m = n$ и правая обратная к матрице A существует, то она единственна.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу BA. Если $\operatorname{rk} A < n$, то $\operatorname{rk} AB \le \operatorname{rk} A < n$. Так как $\operatorname{rk} E_n = n$, не может быть, что $AB = E$.

Пусть теперь $\operatorname{rk} A = n$. Тогда строки A – это полная система в $\mathbb{R}^n$. В самом деле, базис системы строк матрицы A – это линейно независимая система из n векторов в $\mathbb{R}^n$. Значит, она наибольшая по включению, то есть базис $\mathbb{R}^n$.

Строки матрицы BA – это линейные комбинации строк A с коэффициентами из строк B. Мы можем подобрать i-ю строку B так, чтобы линейная комбинация строк A с такими коэффициентами равнялась $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$. Если так сделать со всеми строками B, получим $BA = E$.

Второе утверждение может быть доказано аналогично. □

Следствие 2. *К матрице A существует и левая и правая обратная тогда и только тогда, когда A – квадратная матрица $n \times n$ ранга n.*

Определение 2. Квадратную матрицу $n \times n$ будем называть *невырожденной*, если ее ранг равен n и *вырожденной* иначе (то есть если ее ранг меньше n).

Лемма 3. *Если B – левая обратная к матрице A, а C – правая обратная к матрице A, то $B = C$.*

Доказательство.
$$B = B(AC) = (BA)C = C.$$
□

Следствие 3. *К матрице A существует (двусторонняя) обратная тогда и только тогда, когда A – квадратная матрица $n \times n$ ранга n.*

Доказательство. Если существует обратная матрица, то она является и левой и правой обратной, а потому по следствию 2 матрица A квадратная и ее ранг совпадает с размером.

Наоборот, пусть A – квадратная матрица $n \times n$ ранга n. По следствию 2, существуют и левая обратная и правая обратная матрицы к A. По лемме 3 они совпадают. □

Следствие 4. *Обратная матрица к данной матрице A (когда она существует) единственная.*

Доказательство. Допустим, что есть 2 обратные матрицы: B и C. Тогда B в частности левая обратная, а C в частности правая обратная. По лемме 3 они совпадают. □

Замечание 3. Если $m \neq n$, то левая/правая обратная (если существует) будет определена не однозначно. Например, левыми обратными к матрице
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
будут как
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
так и
$$B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Предложение 2. *Если для квадратных матриц A и B размера $n \times n$ выполнено одно из равенств $AB = E$ и $BA = E$, то выполнено и второе (и, соответственно, $B = A^{-1}$).*

Доказательство. Пусть выполнено $AB = E$. Тогда B – правая обратная к A. Так как правая обратная существует, $\operatorname{rk} A = n$. Следовательно, существует и левая обратная к матрице A, пусть это C. Тогда по лемме 3 $B = C$.

Второй случай (то есть когда $BA = E$) доказывается аналогично. □

Предложение 3 (Равенства с обратными матрицами)**.** *Для квадратных матриц $n \times n$ выполнены равенства:*

1) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;

2) $\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T}$; *(левая и правая части определены или не определены одновременно)*

3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. *(левая и правая части определены или не определены одновременно)*

Доказательство. 1) Пусть $A^{-1} = B$. Тогда $AB = E$, что означает, что $A = B^{-1}$.

2) Ранги матриц A и A^T одинаковы и потому либо они обе вырожденные, либо обе не вырожденные. Если они невырожденные, то
$$E = A^{-1}A = (A^{-1}A)^T = A^T(A^{-1})^T.$$
Отсдюда $(A^{-1})^T$ – это обратная к A^T матрица.

3) Если $\operatorname{rk} A < n$ или $\operatorname{rk} B < n$, то по теореме 2 выполнено $\operatorname{rk} AB < n$, то есть обе части не имеют смысла. Пусть теперь $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} B = n$. Тогда эти матрицы обратимы. Рассмотрим произведение
$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E.$$
Это означает, что матрица AB обратима и ее обратная равна $B^{-1}A^{-1}$. □

Замечание 4. Действие обращения матрицы имеет самый высокий приоритет (наравне с транспонированием).

Определение 3. Пусть φ – элементарное преобразование строк матрицы $m\times n$. Квадратная матрица $S \in \mathrm{Mat}_{m,m}$ называется *матрицей элементарного преобразования* φ (или элементарной матрицей), если для любой матрицы $m \times n$ матрица SA – это матрица, полученная из A элементарным преобразованием φ, то есть $\varphi(A) = SA$.

Лемма 4. *Для любого элементарного преобразования строк φ существует матрица S этого элементарного преобразования строк.*

Доказательство. Элементарное преобразование заключается в том, что строки матрицы $\varphi(A)$ – это некоторые фиксированные линейные комбинации строк A. Составим из коэффициентов этих линейных комбинаций строки S и получим матрицу элементарного преобразования φ. □

Определение 4. Пусть ψ – элементарное преобразование столбцов матрицы $m \times n$. Квадратная матрица $T \in \mathrm{Mat}_{n,n}$ называется *матрицей элементарного преобразования* ψ (или элементарной матрицей), если для любой матрицы $m \times n$ матрица AT – это матрица, полученная из A элементарным преобразованием ψ, то есть $\psi(A) = AT$.

Аналогично лемме 4 можно доказать следующую лемму.

Лемма 5. *Для любого элементарного преобразования столбцов ψ существует матрица T этого элементарного преобразования строк.*

Замечание 5. Матрица S элементарного преобразования φ – это матрица, полученная из E этим элементарным преобразованием (строк или столбцов в зависимости от того, что за преобразование φ). В самом деле, если умножить E на матрицу S (с нужной стороны), то с ней произойдчт элементарное преобразование φ. С другой стороны получится в результате произведения именно матрица S.

Алгоритм поиска обратной матрицы. Пусть нам дана матрица A размера $n \times n$. Наша цель – проверить, обратима ли матрица A и, если да, то найти обратную.

1) приписываем справа к матрице A единичную матрицу такого же размера, получаем матрицу $Z = (A|E)$ размера $n \times 2n$.

2) Делаем элементарные преобразования строк матрицы Z так, чтобы левая часть привелась к улучшенному ступенчатому виду.

3) Если улучшенный ступенчатый вид левой части не E, то матрица A не обратима.

4) Если улучшенный ступенчатый вид A равен E, то получаем матрицу $(E|B)$. При этом $A^{-1} = B$.

Обоснование алгоритма

Если улучшенный ступенчатый вид квадратной матрицы A не единичный, то в нем есть нулевые строки. Это значит, что $\operatorname{rk} A < n$, то есть матрица не обратима.

Пусть теперь улучшенный ступенчатый вид A равен E. При элементарных преобразованиях строк матрица умножается слева на матрицу элементарного преобразования. Так как с обоими частями происходит одинаковое преобразование строк, они умножаются на одинаковые матрицы:

$$(A|E) \to (S_1A|S_1E) \to (S_2S_1A|S_2S_1E) \to \ldots \to (S_k \ldots S_1A|S_k \ldots S_1E) = (E|B).$$

Получаем, что $B = S_k \ldots S_1$ и $S_k \ldots S_1A = BA = E$, то есть $B = A^{-1}$

Лемма 6. *Матрица, обратная к матрице элементарного преобразования – это матрица обратного элементарного преобразования.*

Доказательство. Докажем это для элементарных преоразований строк, для элементарных преобразований столбцов надо поменять порядок произведения матриц. Пусть S – матрица элементарного преобразования φ, а T – матрица элементарного преобразования φ^{-1}. Тогда $S = \varphi(E)$. Значит,

$$E = \varphi^{-1}(\varphi(E)) = \varphi^{-1}(S) = TS.$$

□

Предложение 4. *Любая невырожденная матрица может быть разложена в произведение элементарных матриц.*

Доказательство. Пусть A – невырожденная квадратная матрица. Тогда ее можно привести элементарными преобразованиями строк к единичному виду. Получаем $S_k \ldots S_1A = E$. Отсюда $A = (S_k \ldots S_1)^{-1} = S_1^{-1} \ldots S_k^{-1}$ – произведение элементарных матриц. □