Лекция 11

Определение 1. Пусть A – квадратная матрица $n \times n$. Определителем (детерминантом) матрицы A называется число
$$\det A = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}.$$

В этом выражении $n!$ слагаемых. Половина – со знаком $''+''$, половина – со знаком $''-''$. Каждое слагаемое – произведение n элементов A по одному из каждой строки и по 1 из каждого столбца.

- Определитель 1×1. $\det(a_{11}) = a_{11}$.
- Определитель 2×2.
$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$
- Определитель 3×3.
$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Теорема 1.
$$\det A^T = \det A.$$

Доказательство. Пусть $A^T = B$. Тогда
$$\det B = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)} \dots b_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n} =$$
$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma^{-1}(1)} \dots a_{n\sigma^{-1}(n)} = \langle \delta = \sigma^{-1} \rangle = \sum_{\delta \in S_n} \operatorname{sgn}(\delta) a_{1\delta(1)} \dots a_{n\delta(n)} = \det A.$$
$\square$

Разобьем матрицу на строки/столбцы:
$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{(1)} & \dots & A^{(n)} \end{pmatrix}$$
Тогда $\det A = \varphi(A_1, \dots, A_n) = \psi(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$

Из предыдущей теоремы $\varphi = \psi$. Будем их обозначать det.

Лемма 1.
$$\det(A_1, \dots, \lambda A_i, \dots, A_n) = \lambda \det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_n).$$

Доказательство. В каждое слагаемое $a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$ входит ровно один элемент из A_i. Он умножается на λ, значит, и все слагаемое умножается на λ. $\square$

Лемма 2.
$$\det(A_1, \dots, A_i' + A_i'', \dots, A_n) = \det(A_1, \dots, A_i', \dots, A_n) + \det(A_1, \dots, A_i'', \dots, A_n).$$

Доказательство.
$$\det(A_1, \dots, A_i' + A_i'', \dots, A_n) = \sum_{\delta \in S_n} \operatorname{sgn}(\delta) a_{1\delta(1)} \dots (a'_{i\delta(i)} + a''_{i\delta(i)}) \dots a_{n\delta(n)} =$$
$$= \sum_{\delta \in S_n} \operatorname{sgn}(\delta) a_{1\delta(1)} \dots a'_{i\delta(i)} \dots a_{n\delta(n)} + \sum_{\delta \in S_n} \operatorname{sgn}(\delta) a_{1\delta(1)} \dots a''_{i\delta(i)} \dots a_{n\delta(n)} =$$
$$= \det(A_1, \dots, A_i', \dots, A_n) + \det(A_1, \dots, A_i'', \dots, A_n).$$
$\square$

Определение 2. Функция $F(v_1, \dots, v_k)$ от k векторных аргументов называется *полилинейной*, если при фиксированных значениях всех, кроме одного аргументов она является линейной по этому аргументу.

Две предыдущие леммы дают следующую теорему.

Теорема 2. *Определитель является полилинейной функцией от строк (столбцов) матрицы.*

Доказательство. Для строк теорема уже доказана. Для столбцов можно провести все те же рассуждения, а можно воспользоваться тем, что $\det A = \det A^T$ (операция транспонирования меняет местами строки и столбцы. □

Следствие 1. *Определитель матрицы с нулевой строкой (нулевым столбцом) равен нулю.*

Доказательство. Умножим эту нулевую строку на ноль. С одной стороны определитель не поменяется. С другой, он умножится на ноль. □

Определение 3. Функция $F(v_1, \dots, v_k)$ от k векторных аргументов называется *кососимметричной*, если при смене местами двух аргументов она умножается на -1.

Теорема 3. *Определитель – кососимметричная функция от строк/столбцов матрицы.*

Доказательство. Докажем для строк. Для столбцов доказательство можно получить, используя транспонирование. Нужно доказать, что

$$\det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n) = -\det(A_1, \dots, A_j, \dots, A_i, \dots, A_n).$$

Пусть $A = (A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n)$, $B = (A_1, \dots, A_j, \dots, A_i, \dots, A_n)$. Тогда

$$\det B = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)} \dots b_{i\sigma(i)} \dots b_{j\sigma(j)} \dots b_{n\sigma(n)} =$$
$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{j\sigma(i)} \dots a_{i\sigma(j)} \dots a_{n\sigma(n)} = \langle \delta = \sigma(i,j) \rangle =$$
$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\delta(1)} \dots a_{n\delta(n)} = \sum_{\delta \in S_n} (-\operatorname{sgn}(\delta) a_{1\delta(1)} \dots a_{n\delta(n)}) = -\det A.$$

□

Следствие 2. *Определитель матрицы с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.*

Доказательство. Поменяем местами эти две одинаковые строки. С одной стороны определитель не поменяется. С другой, он умножится на минус 1. □

Следствие 3. *Определитель матрицы с двумя пропорциональными строками (столбцами) равен нулю.*

Доказательство.

$$\det(A_1, \dots, A_i \dots \lambda A_i, \dots, A_n) = \lambda \det(A_1, \dots, A_i \dots A_i, \dots, A_n) = \lambda 0 = 0.$$

□

Вычислим определитель треугольной матрицы.

Предложение 1.

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}.$$

Доказательство. Для любой нетождественной подстановки σ существует i такой, что $\sigma(i) < i$. В самом деле, если не верно $\sigma(n) < n$, то $\sigma(n) = n$. Аналогично, если не верно $\sigma(n-1) < n-1$, то $\sigma(n-1) = n-1$, и т.д. Рассмотрим слагаемое определителя, соответствующее σ. Оно равно $\operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$. Если $\sigma(i) < i$, то $a_{i\sigma(i)} = 0$, а значит, и все слагаемое ноль. Остается только слагаемое, соответствующее id, равное $a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$. □

Следствие 4. $\det E = 1$.

Следствие 5.

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \dots & a_{n-1n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Теорема 4 (Изменение определителя при элементарных преобразованиях строк/столбцов)**.**

- *При элементарном преобразовании III типа с коэффициентом c определитель умножается на c. (Линейность.)*
- *При элементарном преобразовании II типа определитель умножается на* -1*. (Кососимметричность.)*
- *При элементарном преобразовании I типа определитель не меняется.*

Доказательство. Первые 2 пункта уже доказаны, надо доказать третий.

$$\det(A_1,\dots,A_i,\dots,A_j+\lambda A_i,\dots,A_n) = \\ = \det(A_1,\dots,A_i,\dots,A_j,\dots,A_n) + \det(A_1,\dots,A_i,\dots,\lambda A_i,\dots,A_n) = \\ = \det(A_1,\dots,A_i,\dots,A_j,\dots,A_n) + 0.$$

Второе слагаемое равно нулю, так как это определитель матрицы с пропорциональными строками. □

Алгоритм вычисления определителей.

1) Приводим элементарными преобразованиями матрицу к ступенчатому виду. При этом (при элементарных преобразованиях 2 и 3 типа) определитель умножается на ненулевое число. Перемножаем эти числа и запоминаем результат μ.

2) Если ступенчатый вид матрицы не является строго ступенчатым (то есть есть нулевая строка), то конечный определитель ноль, а значит, и начальный определитель ноль.

3) Если ступенчатый вид строго ступенчатый, то конечный определитель равен произведению диагональных элементов. Деля на μ, находим начальный определитель.

Пример 1.

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & -5 \end{vmatrix} = \\ = -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2\cdot 1\cdot(-3)\cdot(-1) = -6,$$

Пример 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Нами уже доказана следующая теорема.

Теорема 5. *Для матрицы A размера* $n\times n$ *следующие условия эквивалентны:*

1) $\mathrm{rk}A < n$,

2) в ступенчатом виде A есть нулевая строка,

3) $\det A = 0$.

4) К матрице A нет обратной.

Нпомним, что матрицы, удовлетворяющие условиям теоремы, называются вырожденными.