

ПРОГРАММА КОЛЛОКВИУМА 1 КУРС 2 ПОТОК.

ЛЕКТОР С.А. ГАЙФУЛЛИН.

- 1) Системы линейных уравнений. Матрица коэффициентов и расширенная матрица коэффициентов. Элементарные преобразования. Эквивалентные системы. Элементарные преобразования переводят СЛУ в эквивалентную.
- 2) Экзотические уравнения. Свободные и главные переменные. Ступенчатый и улучшенный ступенчатый вид. Метод Гаусса решения СЛУ.
- 3) Единственность улучшенного ступенчатого вида матрицы. Понятие ранга матрицы (через ступенчатый вид) и его корректность.
- 4) Векторное пространство. Простейшие свойства из аксиом. Подпространство. Критерий того, что подмножество является подпространством.
- 5) Понятие линейной зависимости системы векторов. 3 свойства линейной зависимости.
- 6) Однородные системы с количеством неизвестных большим количества уравнений. Основная лемма о линейной зависимости.
- 7) Решения однородной системы образуют подпространство. Линейная оболочка: определение и доказательство того, что это подпространство.
- 8) Базис системы векторов: эквивалентность 4 определений. Стандартный базис в  $\mathbb{R}^n$ . Дополнение линейно независимой системы до базиса. Выбор базиса из полной системы.
- 9) Ранг системы векторов и размерность векторного пространства. Связь ранга системы и размерности линейной оболочки. Ранг матрицы (строчный, столбцовый, ступенчатый), их совпадение.
- 10) Свойства ранга матрицы. Теорема Кронекера-Капелли. Критерий определённости системы.
- 11) Фундаментальная система решений и алгоритм её поиска. Размерность пространства решений однородной СЛУ. Структура решений неоднородной СЛУ.
- 12) Линейное отображение. Его матрица в фиксированных базисах. Образ заданного вектора. Изоморфизм. Любое конечномерное пространство изоморфно пространству строк.
- 13) Операции над линейными отображениями и над матрицами, связь между ними. Матричная запись СЛУ.
- 14) Свойства операций над матрицами. Связь с транспонированием.
- 15) Вывод обобщенной ассоциативности для ассоциативной операции.
- 16) Верхние оценки на ранг суммы и произведения матриц.
- 17) Правая/левая обратная матрицы. Критерий существования. Обратная матрица, ее единственность и критерий существования.
- 18) Элементарные матрицы. Умножение на элементарные матрицы слева и справа. Матрица, обратная к произведению. Обратная к транспонированной матрице.
- 19) Алгоритм поиска обратной матрицы. Разложение невырожденной матрицы в произведение элементарных.
- 20) Подстановки и перестановки. Их количество. Произведение подстановок, его свойства. Разложение подстановки на произведение независимых циклов.
- 21) Инверсии. Четность перестановки и подстановки. Знак подстановки. Изменение четности при умножении на транспозицию. Разложение подстановки на транспозиции. Знак произведения подстановок.
- 22) Четность цикла. Четность произвольной подстановки через декремент.
- 23) Формула определителя квадратной матрицы. Определитель транспонированной матрицы. Линейность и кососимметричность определителя как функции от строк/столбцов.
- 24) Определитель матрицы с нулевой строкой/столбцом. Определитель матрицы с пропорциональными строками. Изменение определителя при элементарных преобразованиях строк/столбцов. Определитель треугольной матрицы. Алгоритм вычисления определителя с помощью элементарных преобразований. Эквивалентные условия невырожденности матрицы. Определитель матрицы с углом нулей.
- 25) Единственность с точностью до пропорциональности линейной кососимметрической функции строк/столбцов. Определитель произведения матриц.
- 26) Миноры. Алгебраические дополнения. Разложение определителя по строке/столбцу.
- 27) Фальшивое разложение определителя по строке/столбцу. Явная формула для обратной матрицы.
- 28) Формулы Крамера.
- 29) Теорема о ранге матрицы. Метод окаймляющих миноров.
- 30) Определитель Вандермонда. Задача интерполяции.