

Вопросы экзамена по высшей алгебре

1. Циклические группы, их подгруппы.
2. Смежные классы по подгруппе, теорема Лагранжа, ее следствия.
3. Нормальные подгруппы, коммутант группы. Характеризация коммутанта
4. Центр группы, централизатор элемента и множества элементов.
Нормальность центра
5. Факторгруппа по нормальной подгруппе.
6. Гомоморфизмы групп, нормальность ядра, канонический гомоморфизм на факторгруппу.
7. Изоморфизмы групп, классификация циклических групп.
8. Первая теорема об изоморфизме (теорема о гомоморфизме).
9. Вторая теорема об изоморфизме.
10. Третья теорема об изоморфизме.
11. Группа автоморфизмов группы, подгруппа внутренних автоморфизмов.
12. Свободные группы. Порождение группы образующими и соотношениями.
13. Условия расщепляемости короткой точной последовательности абелевых групп.
14. Периодическая часть абелевой группы и факторгруппа по ней.
Разложение периодической части абелевой группы в прямую сумму примарных компонент.
15. Существование разложения конечной абелевой p -группы в прямую сумму циклических.
16. Единственность разложения конечной абелевой p -группы в прямую сумму циклических.
17. Свободная абелева группа, ее ранг. Совпадение свободы и отсутствия кручения для конечно порожденных абелевых групп.

18. Свойства свободной абелевой группы (универсальное, накрывающее, расщепляющее).
19. Подгруппы свободных конечно порожденных абелевых групп.
20. Целочисленные матрицы, приведение к каноническому диагональному виду. Задание конечно порожденных абелевых групп образующими и соотношениями.
21. Теорема о разложении конечно порожденных абелевых групп в прямую сумму циклических групп.
22. Действие групп на множестве, орбиты и стабилизаторы. Формула орбит.
23. Нетривиальность центра конечной p -группы. Абелевость группы из p^2 элементов.
24. Существование нормальной подгруппы индекса p в конечной p -группе.
25. Первая теорема Силова.
26. Вторая теорема Силова.
27. Третья теорема Силова.
28. Классы сопряженности в группе подстановок.
29. Простота группы A_n .
30. Простота группы SO_3 .
31. Разрешимые группы и их свойства. Критерий разрешимости.
32. Разрешимость группы верхних треугольных матриц.
33. Разрешимость групп порядка, меньшего 60.
34. Классификация групп из 8 элементов.
35. Полупрямые произведения групп.
36. Классификация групп из 12 элементов.

37. Идеалы в кольцах. Простота кольца матриц над полем.
38. Фактор-кольца. Фактор кольца многочленов над полем по идеалу, порожденному неприводимым многочленом.
39. Теорема о гомоморфизме для колец.
40. Максимальные идеалы. Существование максимального идеала в кольце с единицей. Доказательство того, что фактор-кольцо коммутативного кольца с единицей по идеалу является полем тогда и только тогда, когда идеал – главный.
41. Модули, подмодули, фактор-модули. Теорема о гомоморфизме для модулей. Циклические и свободные модули.
42. Кольца главных идеалов, примеры. Каждое евклидово кольцо является кольцом главных идеалов.
43. Существование и единственность разложение на простые множители в кольце главных идеалов.
44. Теорема о согласованных базисах для свободных конечно порожденных модулей над кольцом главных идеалов.
45. Теорема о строении конечно порожденных модулей над кольцом главных идеалов.
46. Расширения полей. Любое конечное расширение является алгебраическим. Теорема о башне полей.
47. Конечность расширения поля, полученного с помощью добавления конечного числа алгебраических элементов. Алгебраические замыкания полей.
48. Существование поля разложения многочлена и существование поля из p^n элементов.
49. Единственность поля разложения многочлена и единственность поля из p^n элементов.
50. Подполя конечного поля. Циклическость мультипликативной группы конечного поля.

51. Алгебры и алгебры с делением. Алгебра кватернионов. Аннулирующие многочлены для элементов алгебры с делением.

52. Теорема Фробениуса.

53. Представления групп. Приводимые, неприводимые, вполне приводимые представления: определения и примеры. Одномерные комплексные представления конечных групп.

54. Комплексные представления конечно порожденных абелевых групп.

55. Теорема Машке.

56. Лемма Шура и следствие из нее.

57. Характеры представлений и их свойства.

58. Ортогональность (и ортонормированность) характеров неприводимых представлений.

59. Теорема о количестве неприводимых комплексных представлений конечной группы.

60. Размерности неприводимых комплексных представлений конечной группы.