# ЛЕКЦИЯ 12

# РАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ

# РАЗРЕШИМОСТЬ ГРУППЫ ВЕРХНИХ ТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ

# ГРУППЫ ИЗ 8 ЭЛЕМЕНТОВ

## РАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ: ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Название этого класса групп восходит к эпохе Абеля, Галуа и др. Задача о решении алгебраических уравнений в радикалах привела к понятию разрешимой группы.

Рассмотрим следующий ряд подгрупп группы $G$, называемый *производным рядом коммутантов*:

$$G \supseteq G' \supseteq G'' = [G', G'] \supseteq \ldots \supseteq G^{(i)} = [G^{(i-1)}, G^{(i-1)}] \supseteq \ldots$$

(каждая следующая подгруппа $G^{(i)}$ является коммутантом

$$[G^{(i-1)}, G^{(i-1)}]$$

предыдущей подгруппы $G^{(i-1)}$).

Замечание 1.

1) Если $f\colon G \to H$ — гомоморфизм групп, то $f([x, y]) = [f(x), f(y)]$, и поэтому $f(G') \subseteq H'$. Следовательно, $f(G'') \subseteq H''$, и далее $f(G^{(i)}) \subseteq H^{(i)}$.

2) Если $g \in G$, $f\colon G \to G$, $f(x) = g^{-1}xg$ для $x \in G$, — внутренний автоморфизм, то, применяя 1), видим, что $g^{-1}G^{(i)}g \subseteq G^i$, т. е. $G^{(i)} \lhd G$ (все подгруппы $G^{(i)}$ производного ряда нормальны в $G$).

Определение 1. Группа $G$ называется *разрешимой* (класса не выше чем $i$), если $G^{(i)} = \{e\}$ для некоторого $i$.

Замечание 2.

1) Если $G$ — абелева группа, то $G' = \{e\}$, поэтому группа $G$ разрешимая.

2) Простая группа $G$, $G \neq \{e\}$, разрешима в том и только в том случае, когда $|G|$ — простое число ($G$ — циклическая группа простого порядка).

3) Группы $\mathbf{S}_n$ и $\mathbf{A}_n$ разрешимы при $n \leqslant 4$ и не являются разрешимыми при $n \geqslant 5$.

4) Группа диэдра $\mathbf{D}_{2n}$ разрешима.

5) Группа кватернионов $\mathbb{Q}_8$ разрешима.

# СВОЙСТВА РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

**Лемма 1.** *Если $G$ — разрешимая группа (класса не выше чем $i$) и $H$ — подгруппа группы $G$, то $H$ — разрешимая группа (класса не выше чем $i$).*

*Доказательство.* Так как $G^{(k)} \supseteq H^{(k)}$, то $\{e\} = G^{(i)} \supseteq H^{(i)}$, т. е. $H^{(i)} = \{e\}$. □

**Лемма 2.** *Если $f\colon G \to H$ — сюръективный гомоморфизм и $G$ — разрешимая группа (класса не выше чем $i$), то $H = f(G)$ также разрешимая группа (класса не выше чем $i$).*

*Доказательство.* Так как $f([x,y]) = [f(x), f(y)]$ и $f$ — сюръективный гомоморфизм, то $f(G') = H'$, а поэтому $H^{(i)} = f(G^{(i)}) = \{e_H\}$. □

**Следствие 1.** *Если $G$ — разрешимая группа (класса не выше чем $i$) и $N \lhd G$, то фактор-группа $G/N$ — разрешимая группа (класса не выше чем $i$).*

*Доказательство.* Рассмотрим канонический сюръективный гомоморфизм $\pi_N\colon G \to G/N$. □

**Теорема 1.** *Группа $G$ разрешима тогда и только тогда, когда в группе $G$ существует субнормальная цепь подгрупп*

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_{i-1} \supset G_i \supset \ldots \supset G_r = \{e\}$$

*(это означает, что $G_{i+1} \lhd G_i$ для всех $i$) с абелевыми фактор-группами $G_{i-1}/G_i$ для всех $i$.*

*Доказательство.*

1) Допустим, что группа $G$ разрешимая. Рассмотрим цепь нормальных подгрупп коммутантов (производный ряд коммутантов)

$$G \supset G' \supset G'' \supset \ldots \supset G^{(i)} = \{e\}.$$

Тогда $G^{(i-1)}/G^{(i)} = G^{(i-1)}/[G^{(i-1)}, G^{(i-1)}]$ — абелева группа для всех $i$.

2) Допустим, что существует указанная субнормальная цепь подгрупп с абелевыми факторами. Так как $G_0/G_1$ — коммутативная группа, то $G' \subseteq G_1$. Далее, $G'' = [G', G'] \subseteq [G_1, G_1] \subseteq G_2$, поскольку $G_1/G_2$ — абелева группа. Таким образом, $G^{(i)} \subseteq G_i$ для всех $i$, и поэтому $G^{(r)} \subseteq G_r = \{e\}$, т. е. $G$ — разрешимая группа (класса не выше чем $r$). $\square$

**Следствие 2.** *Если $N$ — нормальная подгруппа группы $G$, то $G$ — разрешимая группа тогда и только тогда, когда $N$ и $G/N$ — разрешимые группы.*

*Доказательство.*

1) Если $G$ — разрешимая группа, то, как мы уже доказали, $N$ и $G/N$ — разрешимые группы.

2) Допустим, что $N$ и $G/N = \bar{G}$ — разрешимые группы. Тогда существуют субнормальные цепи с абелевыми фактор-группами:

$$N = N_0 \supset N_1 \supset \ldots \supseteq N_r = \{e\}, \quad N_{i-1}/N_i \text{ — абелева группа,}$$
$$G/N = \bar{G} = \bar{G}_0 \supset \bar{G}_1 \supset \ldots \supset \bar{G}_s = \{\bar{e}\}, \quad \bar{G}_{i-1}/\bar{G}_i \text{ — абелева группа.}$$

Из строения и свойств подгрупп фактор-группы следует, что $\bar{G}_i = G_i/N$, $N \subseteq G_i \subseteq G$, $G_{i-1} \rhd G_i$, $\bar{G}_{i-1}/\bar{G}_i = (G_{i-1}/N)/(G_i/N) \cong G_{i-1}/G_i$ — абелева группа. Таким образом,

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_s = N = N_0 \supset N_1 \supset \ldots \supset N_r = \{e\} \text{ —}$$

субнормальная цепь в группе $G$ с абелевыми фактор-группами, т. е. $G$ — разрешимая группа. □

Упражнение 1. Любая конечная группа из менее чем 60 элементов разрешима.

Упражнение 2. Если $|G| = p^2q$, $q \neq p$, то $G$ — разрешимая группа.

Замечание 3. Теорема Бернсайда (1904 г.) утверждает, что если $p$ и $q$ — различные простые числа, то любая группа порядка $p^m q^n$ разрешима $(m, n \geqslant 0)$.

# РАЗРЕШИМОСТЬ ГРУППЫ ВЕРХНИХ ТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ

**Теорема 2.** *Группа треугольных матриц* $G = \mathbf{T}_n(K)$ *над полем* $K$ (*т. е. треугольных матриц вида*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$0 \neq a_{ii} \in K$) *является разрешимой группой.*

*Доказательство.*

1) Рассмотрим унитреугольную подгруппу $H = \mathbf{U}T_n(K)$ матриц вида

$$B = \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

При умножении треугольных матриц их соответствующие диагональные элементы перемножаются, поэтому в матрице $A^{-1}BA$ на $(i, i)$-м месте стоит $a_{ii}^{-1} 1 a_{ii} = 1$, т. е. $A^{-1}BA \in H$, и поэтому $H$ — нормальная подгруппа в $G$, $H \lhd G$. Это же соображение показывает, что $[G, G] \subseteq H$, поскольку для $A, D \in \mathbf{T}_n(K)$ в коммутаторе $[A, D]$ на месте $(i, i)$ стоит элемент $a_{ii}^{-1} d_{ii}^{-1} a_{ii} d_{ii} = 1$, т. е. $[A, D] \in H$. Поэтому фактор-группа $G/H$ абелева и, следовательно, разрешимая.

2) Докажем индукцией по $n$, что $H = H_n$ — разрешимая группа. Рассмотрим отображение

$$H_n = \mathbf{U}T_n(K) \xrightarrow{f} \mathbf{U}T_{n-1}(K) = H_{n-1},$$

при котором если

$$B = \begin{pmatrix} B' & * \\ 0 \dots 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то $f(B) = B'$. Так как для $x, y \in \hat{K}^{n-1}$, $B', C' \in \mathbf{U}T_{n-1}(K)$ имеем

$$\begin{pmatrix} B' & x \\ 0 \dots 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C' & y \\ 0 \dots 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B'C' & B'y + x \\ 0 \dots 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то $f$ — сюръективный гомоморфизм групп, при этом

$$\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} E_{n-1} & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \hat{K}^{n-1} \right\}.$$

Тогда $\ker f \lhd \mathbf{U}T_n(K)$ (как ядро гомоморфизма $f$) и

$$\mathbf{U}T_n(K) / \ker f \cong \mathbf{U}T_{n-1}(K)$$

(в силу теоремы о гомоморфизме). Но $\ker f$ — абелева группа, и следовательно, разрешимая группа. По индуктивному предположению $\mathbf{U}T_{n-1}(K)$ — разрешимая группа. Тогда и группа $H = H_n$ разрешимая.

3) Так как $H = \mathbf{U}T_n(K)$ — разрешимая группа и $G/H$ — разрешимая группа, то $G = \mathbf{T}_n(K)$ — разрешимая группа. $\square$

# ГРУППЫ ИЗ 8 ЭЛЕМЕНТОВ

**Теорема 3** (классификация групп из 8 элементов)**.** *Любая группа из* 8 *элементов изоморфна одной из следующих*:

1) $\mathbb{Z}_8$;
2) $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2$;
3) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$;
4) $\mathbf{D}_4$;
5) $\mathbb{Q}_8$.

*Никакие две из перечисленных выше групп не изоморфны друг другу.*

*Доказательство.* Пусть $|G| = 8$.

Если группа $G$ абелева, то она изоморфна одной из первых трех перечиленных выше групп, по теореме о классификации конечных абелевых групп. Ясно, что эти группы не изоморфны друг другу и оставшимся двум группам.

Пусть теперь $G$ — неабелева.

Если бы в группе $G$ имелся бы элемент порядка восемь, то она оказалась бы циклической, т.е. абелевой, что невозможно.

Если бы в группе $G$ все элементы имели бы порядок два, то она также была бы абелева.

Значит, в группе $G$ все элементы имеют либо порядок два, либо четыре, при этом есть хотя бы один элемент порядка четыре. Обозначим его через $a$. Подгруппа $\langle a \rangle$ состоит из четырех элементов.

Пусть вне этой подгруппы имеется элемент $b$ порядка два.

В этом случае все элементы

$$a^k b^l, \qquad k = 0, 1, 2, 3, \quad l = 0, 1,$$

различны. Так как их всего восемь, то любой элемент группы представляется в виде $a^k b^l$.

Подгруппа $\langle a \rangle$ имеет в группе $G$ индекс два, поэтому она нормальна. Значит,

$$bab^{-1} = a^k.$$

Это означает, что либо $bab^{-1} = a$, либо $bab^{-1} = a^{-1}$. Первый случай невозможен, так как группа неабелева. Значит, выполнено второе соотношение.

Таким образом, данная группа изоморфна группе $\mathbf{D}_4$ движений квадрата.

Теперь рассмотрим оставшийся случай: вне подгруппы $\langle a \rangle$ все элементы имеют порядок четыре. Рассмотрим произвольный элемент $b \in G \setminus \langle a \rangle$. Ясно, что $b^2$ (как элемент порядка два) должен совпасть с $a^2$. Таким образом, $a^2 = b^2 = c$ — это элемент центра групп $G$. Как и в предыдущем случае, $bab^{-1} = a^{-1} = ca$.

Если мы обозначим $c$ через $-1$, $a$ — через $i$, $b$ — через $j$, а $ab$ — через $k$, то полученная группа совпадет с $\mathbb{Q}_8$. $\square$