ЛЕКЦИЯ 21

ТЕОРЕМА МАШКЕ

ЛЕММА ШУРА И СЛЕДСТВИЯ

ХАРАКТЕРЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

ТЕОРЕМА МАШКЕ

Теорема 1 (теорема Машке). *Каждое линейное представление конечной группы G над полем K характеристики, не делящей $|G|$ (в частности, нулевой), вполне приводимо.*

Доказательство. Пусть U — инвариантное относительно φ подпространство во всем пространстве представления V.

Рассмотрим прямую сумму

$$V = U \oplus U',$$

где U' — произвольным образом выбранное дополнение к U. Вообще говоря, U' не является φ-инвариантным.

Возьмем оператор проектирования $\rho : V \to U'$, определенный соотношением

$$\rho v = u'$$

для всякого вектора $v = u + u'$. Имеем

$$v - \rho v \in U, \quad \rho(U) = 0, \quad \rho^2 = \rho.$$

Возьмем теперь "усредненный" линейный операто

$$\rho_G = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \varphi(h) \rho \varphi(h^{-1})$$

(деление на $|G|$ по условию возможно).

Покажем, что

$$\varphi(g)\rho_G = \rho_G\varphi(g)$$

для всех $g \in G$.

Действительно,

$$\varphi(g)\rho_G\varphi(g^{-1}) = \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\varphi(g)\varphi(h)\rho\varphi(h^{-1})\varphi(g^{-1}) =$$
$$= \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\varphi(gh)\rho\varphi((gh)^{-1}) =$$
$$= \frac{1}{|G|}\sum_{t\in G}\varphi(t)\rho\varphi(t^{-1}) = \rho_G,$$

что и приводит к искомому равенству.

Теперь положим

$$W = \rho_G(V) = \{\rho_G v \mid v \in V\}.$$

Благодаря соотношению

$$\varphi(g)\rho_G = \rho_G\varphi(g)$$

имеем

$$\varphi(g)w = \varphi(g)\rho_G v = \rho_G\varphi(g)v = \rho_G v' = w' \in W$$

для всякого $w \in W$, так что векторное подпространство $W \subset V$ также является φ-инвариантным подпространством.

Осталось показать, что $V = U \oplus W$ — прямая сумма подпространств.

Так как

$$\varphi(h^{-1})v - \rho\varphi(h^{-1})v \in U,$$

то

$$\begin{aligned} v - \varphi(h)\rho\varphi(h^{-1})v = \\ = \varphi(h)\left(\varphi(h^{-1})v - \rho\varphi(h^{-1})v\right) \in \varphi(h)U = U \end{aligned}$$

(применяем инвариантность U).

Следовательно,

$$v - \rho_G v = \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}(v - \varphi(h)\rho\varphi(h^{-1})v) = u \in U,$$

и мы получаем

$$v = u + w, \quad \text{где } w = \rho_G v \in W,$$

т.е.

$$V = U + W.$$

Осталось доказать, что

$$U \cap W = 0.$$

Так как

$$\varphi(h^{-1})U \subset U \Rightarrow \rho\varphi(h^{-1})U = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varphi(h)\rho\varphi(h^{-1})U = 0 \Rightarrow \rho_G(U) = 0,$$

откуда следует

$$v - \rho_G v = u \in U \Rightarrow \rho_G(v - \rho_G v) = 0,$$

поэтому $\rho_G v = \rho_G^2 v$ для всех $v \in V$. Это значит, что ρ_G — проектирование на W вдоль U:

$$\rho_G(U) = 0, \quad \rho_G^2 = \rho_G.$$

Пусть теперь

$$v \in U \cap W,$$

тогда $\rho_G v = 0$, поскольку $v \in U$, и $v = \rho_G v'$, поскольку $v \in \rho_G(V) = W$.

Используя предыдущие соотношения, получаем

$$0 = \rho_G v = \rho_G(\rho_G v') = \rho_G^2 v' = \rho_G v' = v,$$

откуда следует, что

$$U \cap W = 0.$$

□

Однозначности разложения на неприводимые компоненты, конечно же, не будет.

Например, если $\varphi(g)$ — единичный оператор для всех $g \in G$, то любое прямое разложение пространства V в сумму одномерных подпространств будет разложением на неприводимые компоненты, а таких разложений бесконечно много.

Однако если мы сгруппируем все изоморфные неприводимые компоненты:

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_s,$$

где

$$\begin{aligned} &U_1 = V_1 \oplus \cdots \oplus V_1 = n_1 V_1, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &U_s = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s = n_s V_s, \end{aligned}$$

то такое разложение уже будет иметь однозначный вид (докажем это позже).

Замечание 1. Почти один и тот же пример демонстрирует, что теорема Машке перестает быть верной, если либо группа G бесконечна, либо характеристика поля делит порядок группы.

Именно, рассмотрим группу $G = \mathbb{Z}$ и ее двухмерное представление

$$n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Мы уже упоминали выше, что оно приводимо, но не вполне приводимо.

Теперь рассмотрим поле характеристики p и группу $G = \mathbb{Z}_p$ с представлением

$$n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad n = 0, 1, \ldots, p-1.$$

Оно также является приводимым, но не вполне приводимым.

ЛЕММА ШУРА

Теорема 2 (лемма Шура). *Пусть*

$$\varphi : G \to \mathrm{GL}\,(V) \text{ и } \psi : G \to \mathrm{GL}\,(W)$$

— два неприводимых представления группы G*,*

$$\sigma : V \to W$$

— линейное отображение такое, что

$$\psi(g)\sigma = \sigma\varphi(g) \quad \forall g \in G.$$

Тогда

а) *если представления* φ *и* ψ *не эквивалентны, то* $\sigma = 0$*;*

б) *если* $V = W$*,* $\varphi = \psi$*, поле представления алгебраически замкнуто, то* $\sigma = \lambda E$*.*

Доказательство. а) Если представления φ и ψ не эквивалентны, то σ — не изоморфизм.

1. Пусть у σ есть ненулевое ядро $U \subset V$. Тогда для любого $u \in U$ $\sigma(u) = 0$. Рассмотрим $\varphi(g)u = u'$. Так как

$$\sigma u' = \sigma\varphi(g)u = \psi(g)\sigma u = 0,$$

то $\varphi(g)u \in U$. Значит, U — инвариантное подпространство.

Таким образом, ядро может быть ненулевым только при $\sigma = 0$.

2. Пусть образ σ не совпадает со всем W. Обозначим этот образ через $U \subset W$, пусть $u \in U$. Тогда

$$\psi(g)u = \psi(g)\sigma u' = \sigma(\varphi(g)u') \in U.$$

Таким образом, U — инвариантное подпространство.

б) Рассмотрим ситуацию, когда $\varphi = \psi$, в этих терминах условие леммы переписывается как

$$\forall g \in G \quad \varphi(g) \cdot \sigma = \sigma \cdot \varphi(g).$$

Так как поле алгебраически замкнуто, то у оператора σ есть некоторое собственное значение λ, то есть у оператора $\sigma' := \sigma - \lambda \cdot E$ ядро обязательно ненулевое.

Так как скалярное отображение $\lambda \cdot E$ также коммутирует со всеми $\varphi(g)$, $g \in G$, то

$$\forall g \in G \quad \varphi(g) \cdot \sigma' = \sigma' \cdot \varphi(g).$$

По доказательству предыдущего пункта $\ker \sigma'$, являясь φ-инвариантным и не равным нулю должно совпадать с V, поэтому $\sigma' = 0$ и $\sigma = \lambda \cdot E$. $\square$

СЛЕДСТВИЯ ЛЕММЫ ШУРА

Предложение 1. *Пусть $\varphi : G \to \mathrm{GL}\,(V)$ и $\psi : G \to \mathrm{GL}\,(W)$ — два неприводимых комплексных представления конечной группы G порядка $|G|$ и $\sigma : V \to W$ — произвольное линейное отображение.*

Тогда усредненное отображение

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi(g) \sigma \varphi(g)^{-1}$$

обладает следующими свойствами:

а) если φ и ψ не эквивалентны, то $\widetilde{\sigma} = 0$;

б) если $V = W$, $\varphi = \psi$, то $\tilde{\sigma} = \lambda E$, $\lambda = \frac{\mathrm{tr}\,\sigma}{\dim V}$.

Доказательство. Нужно лишь проверить, что отображение $\tilde{\sigma}$ удовлетворяет условиям леммы Шура:

$$\psi(g)\tilde{\sigma} = \frac{1}{|G|}\psi(g) \sum_{h \in G} \psi(h) \sigma \varphi(h)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \psi(g)\psi(h)\sigma\varphi(h)^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \psi(gh)\sigma\varphi(h)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \psi(gh)\sigma\varphi(gh)^{-1}\varphi(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{h' \in G} \psi(h')\sigma\varphi(h')^{-1}\varphi(g) =$$

$$= \tilde{\sigma}\varphi(g).$$

Таким образом,

$$\psi(g)\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}\varphi(g) \text{ для всех } g \in G.$$

По лемме Шура вытекают сразу оба утверждение, причем уточнение по поводу константы следует из соотношений

$$(\dim V)\lambda = \operatorname{tr} \lambda E = \operatorname{tr} \tilde{\sigma} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \operatorname{tr} \varphi(g)\sigma\varphi(g)^{-1} =$$
$$= \frac{1}{|G|} \sum_{ginG} \operatorname{tr} \sigma = \operatorname{tr} \sigma.$$

□

Нам понадобится матричная формулировка этого предложения.

Выберем в пространствах V, W какие-нибудь базисы:

$$V = \langle e_i \mid i \in I \rangle, \quad W = \langle f_j \mid j \in J \rangle.$$

Отождествим наши отображения φ и ψ с соответствующими матрицами в заданных базисах:

$$\varphi_g = (\varphi(g)_{i,i'}), \quad \psi_g = (\psi(g)_{j,j'}).$$

Пусть $\sigma = (\sigma_{ji})$.

по определению $\tilde{\sigma}$ имеем

$$\widetilde{\sigma_{ji}} = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G, i'\in I, j'\in J} \psi_{j,j'}(g)\sigma_{j',i'}\varphi_{i',i}(g^{-1}).$$

Заметим, что отображение $\sigma : V \to W$ в предложении совершенно произвольно. Например, мы можем взять

$$\sigma_{ji} = 0 \text{ при } (j,i) \neq (j_0, i_0), \quad \sigma_{j_0,i_0} = 1.$$

Тогда первому утверждению предложения будет отвечать соотношение

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \psi_{j,j_0}(g) \cdot \varphi_{i_0,i}(g^{-1}) = 0 \qquad (*)$$

для всех i, i_0, j, j_0 (мы считаем, что представления φ и ψ не эквивалентны).

Теперь пусть $V = W$, $\varphi = \psi$.

Следствие 1. *В матричной формулировке пункта (б) предыдущего предложения выполнено соотношение*

$$|G|^{-1} \sum_{g\in G} (\varphi(g))_{j,j_0} \cdot (\varphi(g^{-1}))_{i_0,i} = \begin{cases} \frac{\delta_{j,i}}{\dim V}, & \text{если } j_0 = i_0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \qquad (**)$$

Доказательство. Так как в предыдущей задаче σ было произвольным эндоморфизмом пространства V, то снова выберем $\sigma = E_{j_0,i_0}$. Тогда

$$\tilde{\sigma}_{j,i} = |G|^{-1} \left(\sum_{g\in G} (\varphi(g)) E_{j_0,i_0} (\varphi(g^{-1})) \right)_{j,i} =$$

$$= |G|^{-1} \sum_{g\in G} \left(\sum_{k} \varphi(g)_{k,j_0} E_{k,j_0} E_{j_0,i_0} \sum_{l} \varphi(g^{-1})_{i_0,l} E_{i_0,l} \right)_{j,i} =$$

$$= |G|^{-1} \sum_{g\in G} \left(\sum_{k,l} \varphi(g)_{k,j_0} \varphi(g^{-1})_{i_0,l} E_{k,l} \right)_{j,i} =$$

$$= |G|^{-1} \sum_{g\in G} (\varphi(g))_{j,j_0} \cdot (\varphi(g^{-1}))_{i_0,i}.$$

$\square$

ХАРАКТЕРЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Определение 1. *Характером* произвольного комплексного конечномерного линейного представления $\varphi : G \to \mathrm{GL}\,(V)$ группы G называется функция

$$\chi_\varphi : G \to \mathbb{C},$$

определенная соотношением

$$\chi_\varphi(g) = \mathrm{tr}\,\varphi(g), \quad g \in G.$$

Лемма 1. *Характеры эквивалентных представлений совпадают.*

Доказательство. Это утверждение совершенно очевидно, так как следы сопряженных матриц совпадают:

$$\mathrm{tr}\,(ABA^{-1}) = \mathrm{tr}\,((AB)(A^{-1})) = \mathrm{tr}\,(A^{-1}AB) = \mathrm{tr}\,B.$$

$\square$

Предложение 2. *Пусть* χ_φ *— характер комплексного линейного представления* $\varphi : G \to \mathrm{GL}\,(V)$*. Тогда*

а) $\chi_\varphi(e) = \dim V$*;*

б) $\chi_\varphi(hgh^{-1}) = \chi_\varphi(g)$ *для всех* $g, h \in G$*;*

в) $\chi_\varphi(g^{-1}) = \overline{\chi_\varphi(g)}$ *для любого элемента* $g \in G$ *конечного порядка;*

г) *прямой сумме* $\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2$ *представлений отвечает характер* $\chi_\varphi = \chi_{\varphi_1} + \chi_{\varphi_2}$*.*

Доказательство. а) Единичный элемент группы G всегда отображается в единичную матрицу, след которой равен размерности пространства.

б) Также следует из того, что у сопряженных матриц след совпадает.

в) Если элемент $g \in G$ имеет конечный порядок, то $\varphi(g)$ обязательно диагонализируем, так как его жорданова нормальная форма не может содержать жордановых клеток размера, большего одного:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & * & * \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & * \\ 0 & 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix},$$

то есть ни одна степень этой клетки не будет единичной матрицей, так как на месте $(1, 2)$ у нее всегда будет стоять ненулевой элемент $n\lambda^{n-1}$.

Если матрица $\varphi(g)$ диагонализируема, то можно считать, что она диагональна. При это на диагонали стоят корни n-ой степени из 1, т.е. числа вида

$$\cos\alpha + i\sin\alpha.$$

Обратные элементы имеют вид

$$\cos\alpha - i\sin\alpha = \overline{\cos\alpha + i\sin\alpha}.$$

Таким образом, если

$$\varphi(g) = ADA^{-1}, \quad D = \operatorname{diag}[z_1, \dots, z_m],$$

то

$$\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1} = AD^{-1}A^{-1} = A\overline{D}A^{-1}.$$

Тогда ясно, что $\chi_\varphi(g^{-1}) = \overline{\chi_\varphi(g)}$.

г) Очевидно. $\square$