ЛЕКЦИЯ 22

СВОЙСТВО ОРТОГОНАЛЬНОСТИ ХАРАКТЕРОВ

КОЛИЧЕСТВО НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

РАЗМЕРНОСТИ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

СВОЙСТВО ОРТОГОНАЛЬНОСТИ ХАРАКТЕРОВ

Определение 1. Пространство $\mathbb{C}^G$ — это множество всех функций из группы G в поле $\mathbb{C}$, снабженное структурой векторного пространства. Функция их $\mathbb{C}^G$ называется *центральной*, если она постоянна на сопряженных классах группы G.

Лемма 1. *Если группа G конечна, то скалярное произведение*

$$(\sigma, \tau)_G := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sigma(g) \overline{\tau(g)}, \quad \sigma, \tau \in \mathbb{C}^G,$$

превращает $\mathbb{C}^G$ в эрмитово пространство.

Доказательство. Ясно, что $(\cdot, \cdot)_G$ является полутралинейной формой на пространстве $\mathbb{C}^G$. Нам нужно только проверить положительную определенность.

Действительно,

$$(\sigma, \sigma)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sigma(g) \overline{\sigma(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\sigma(g)|^2 > 0,$$

если $\sigma \neq 0$. □

Теорема 1. *Пусть φ, ψ — неприводимые комплексные представления конечной группы G. Тогда*

$$(\chi_\varphi, \chi_\psi)_G = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi \sim \psi, \\ 0, & \text{если } \varphi \not\sim \psi. \end{cases}$$

Доказательство. 1. Пусть $\varphi \sim \psi$. Тогда, как мы показывали выше, $\chi_\varphi = \chi_\psi$. Таким образом,

$$(\chi_\varphi, \chi_\varphi)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\operatorname{tr}(\varphi(g))|^2 =$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \operatorname{tr}(\varphi(g)) \operatorname{tr}(\varphi(g^{-1})) =$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi(g)_{i,i} \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \varphi(g^{-1})_{j,j} \right) =$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{i,j=1}^{n} \varphi(g)_{i,i} \varphi(g^{-1})_{j,j} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\sum_{g \in G} \varphi(g)_{i,i} \varphi(g^{-1})_{j,j} \right).$$

Однако по $(**)$

$$|G|^{-1} \sum_{g \in G} (\varphi(g))_{j,j_0} \cdot (\varphi(g^{-1}))_{i_0,i} = \begin{cases} \frac{\delta_{j,i}}{\dim V}, & \text{если } j_0 = i_0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Значит, слагаемые, у которых $i \neq j$, будут равны нулю, поэтому вся сумма будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{g \in G} \varphi(g)_{i,i} \varphi(g^{-1})_{i,i} \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, первое утверждение доказано.

Теперь применим соотношение $(*)$:

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi_{j,j_0}(g) \cdot \varphi_{i_0,i}(g^{-1}) = 0.$$

Положим в нем $i_0 = i$, $j_0 = j$ и просуммируем по i и j, после чего получим

$$0 = \frac{1}{|G|} \sum_{g,i,j} \psi_{j,j}(g) \varphi_{i,i}(g^{-1}) =$$
$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left(\sum_{j} \psi_{j,j}(g) \right) \left(\sum_{i} \varphi_{ii}(g^{-1}) \right) =$$
$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\psi}(g) \chi_{\varphi}(g^{-1}) =$$
$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\psi}(g) \overline{\chi_{\varphi}(g)} = (\chi_{\psi}, \chi_{\varphi})_G.$$

$\square$

Следствие 1. *Пусть*

$$\varphi = \varphi_1 \oplus \cdots \oplus \varphi_k$$

— разложение комплексного представления φ (группы G) в прямую сумму неприводимых представлений.

Если ψ — какое-то неприводимое комплексное представление той же группы, то число слагаемых в разложении φ, изоморфных ψ, равно

$$(\chi_V, \chi_W)_G$$

и не зависит от способа разложения (кратность вхождения ψ в φ).

Два представления с одним и тем же характером изоморфны.

Доказательство. Как мы отмечали выше,

$$\chi_\varphi = \chi_{\varphi_1} + \cdots + \chi_{\varphi_k},$$

поэтому

$$(\chi_\varphi, \chi_\psi)_G = (\chi_{\varphi_1}, \chi_\psi)_G + \cdots + (\chi_{\varphi_k}, \chi_\psi)_G.$$

По только что доказанной теореме справа стоит сумма единиц и нулей, причем число единиц совпадает с числом представлений φ_i, изоморфных ψ.

Но скалярное произведение слева $(\chi_\varphi, \chi_\psi)_G$ вообще не зависит от какого-либо разложения, так что мы уже доказали инвариантность кратности вхождения ψ в φ.

Два представления φ, φ' группы G с одним и тем же характером $\chi = \chi_\varphi = \chi_{\varphi'}$ содержат в своих разложениях любое слагаемое, изоморфное данному неприводимому представлению ψ, одинаковое число раз, а именно $(\chi, \chi_\psi)_G$.

Поэтому в разложениях

$$\varphi = \oplus_{i=1}^{k} \varphi_i, \qquad \varphi' = \oplus_{j=1}^{l} \varphi'_j$$

на неприводимые прямые слагаемые мы можем считать $l = k$, $\varphi'_i \cong \varphi_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Следовательно, изоморфны и сами представления φ, φ'. $\square$

РЕГУЛЯРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Определение 2. *Регулярным* представлением конечной группы $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ называется n-мерное представление ρ, в котором $\rho(g_i)e_k = e_l$, если $g_i g_k = g_l$.

Упражнение 1. Найдите регулярное представление групп $\mathbb{Z}_3$, $\mathbf{V}_4$.

КОЛИЧЕСТВО НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Лемма 2. *Пусть* Γ — *центральная функция на конечной группе* G, $\varphi : G \to \mathrm{GL}\,(V)$ — *неприводимое комлексное представление с характером* χ_φ.

Тогда для линейного оператора

$$\varphi_\Gamma = \sum_{h \in G} \overline{\Gamma}(h)\varphi(h) : V \to V$$

имеет место $\varphi_\Gamma = \lambda E$, *где*

$$\lambda = \frac{|G|}{\chi_\varphi(e)}(\chi_\varphi, \Gamma)_G.$$

Доказательство. Так как Γ — центральная функция, то

$$\varphi(g)\varphi_\Gamma\varphi(g)^{-1} = \sum_{h \in G} \overline{\Gamma}(h)\varphi(g)\varphi(h)\varphi(g^{-1}) =$$

$$= \sum_{h \in G} \overline{\Gamma(ghg^{-1})}\varphi(ghg^{-1}) =$$

$$= \sum_{t \in G} \overline{\Gamma}(t)\varphi(t) = \varphi_\Gamma.$$

Итак, $\varphi_\Gamma \varphi(g) = \varphi(g)\varphi_\Gamma$ для всех $g \in G$. Лемма Шура, примененная к случаю $\sigma = \varphi_\Gamma$, показывает, что $\varphi_\Gamma = \lambda E$.

Вычисляя след операторов, стоящих в обеих частях этого равенства, находим

$$\lambda \chi_\varphi(e) = \lambda \dim V = \operatorname{tr} \lambda E = \operatorname{tr} \varphi_\Gamma = \\ = \sum_{h \in G} \overline{\Gamma}(h) \operatorname{tr} \varphi(h) = \\ = |G| \left(\frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \chi_\varphi(h) \overline{\Gamma(h)} \right) = |G| (\chi_\varphi, \Gamma)_G.$$

$\square$

Предложение 1. *Характеры $\chi_1, \ldots, \chi_s$ всех попарно неэквивалентных неприводимых комплексных представлений конечной группы G образуют ортонормированный базис пространства всех центральных функций из G в $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Как мы уже знаем, система характеров

$$\chi_1, \ldots, \chi_s$$

ортонормирована, и ее можно включить в ортонормированный базис пространства центральных функций $X_{\mathbb{C}}(G)$. Пусть Γ — произвольная центральная функция, ортогональная ко всем χ_i:

$$(\chi_i, \Gamma)_G = 0.$$

Тогда по предыдущей лемме линейный оператор $\varphi_\Gamma^{(i)}$, отвечающий представлению $\varphi^{(i)}$ с характером χ_i, равен нулю.

По теореме Машке всякое комплексное представление φ можно разложить в прямую сумму

$$\varphi = m_1\varphi^{(1)} + \cdots + m_s\varphi^{(s)}$$

неприводимых представлений с некоторыми кратностями $m_1, \ldots, m_s$. В соответствии для этим разложением для оператора φ_Γ, определенного соотношением

$$\varphi_\Gamma = \sum_{h \in G} \overline{\Gamma}(h)\varphi(h),$$

имеем

$$\varphi_\Gamma = m_1\varphi_\Gamma^{(1)} + \cdots + m_s\varphi_\Gamma^{(s)} = 0.$$

В частности, это относится к линейному оператору ρ_Γ, где ρ — регулярное представление.

Но в таком случае будем иметь (обозначая временно единичный элемент группы G символом 1, чтобы избежать сочетания e_e)

$$0 = \rho_\Gamma(e_1) = \sum_{h\in G} \overline{\Gamma}(h)\rho(h)e_1 = \sum_{h\in G} \overline{\Gamma}(h)e_h \Rightarrow \overline{\Gamma}(h) = 0.$$

Это верно при любом $h \in G$, поэтому $\overline{\Gamma} = 0$ и, следовательно, $\Gamma = 0$. $\square$

Теорема 2. *Число неприводимых попарно неэквивалентных комплексных представлений конечной группы G равно числу ее классов сопряженных элементов.*

Доказательство. Число классов сопряженности группы G можно интерпретировать как размерность пространства $X_{\mathbb{C}}(G)$ всех центральных функций на группе G. Так как характеры различных неприводимых представлений образуют базис этого пространства, то их ровно искомое число. $\square$

РАЗМЕРНОСТИ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Теорема 3. *Каждое неприводимое представление φ_i входит в разложение регулярного представления ρ с кратностью, равной его размерности n_i. Порядок $|G|$ и размерности $n_1, \ldots, n_r$ всех ее неприводимых представлений связаны соотношением*

$$\sum_{i=1}^{r} n_i^2 = |G|.$$

Доказательство. Для доказательства рассмотрим более подробно регулярное представление, введенное в пролой лекции.

Обозначим его через

$$(\rho, \langle e_g \mid g \in G\rangle_{\mathbb{C}}).$$

Обозначим через R_h матрицу линейного оператора $\rho(h)$ в данном базисе $\{e_g \mid g \in G\}$.

Так как $\rho(h)e_g = e_{hg}$, то все диагональные элементы матрицы R_h при $h \neq e$ равны нулю и $\operatorname{tr} R_h = 0$.

Таким образом,

$$\chi_\rho(e) = |G|, \quad \chi_\rho(h) = 0 \text{ при } h \neq e.$$

Пусть теперь (φ, V) — произвольное неприводимое представление группы G над $\mathbb{C}$. Как мы помним, кратность вхождения φ в ρ равна скалярному произведению $(\chi_\varphi, \chi_\rho)_G$:

$$(\chi_\varphi, \chi_\rho)_G = \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\chi_\rho(h)\overline{\chi_\varphi(h)} = \\ = \frac{1}{|G|}\chi_\rho(e)\overline{\chi_\varphi(h)} = \frac{1}{|G|}|G|\overline{\chi_\varphi(e)} = \dim V.$$

Таким образом, мы видим, что каждое неприводимое представление входит в регулярное с кратностью, равное своей размерности.

По предыдущей теореме имеется r попарно неэквивалентных неприводимых представлений

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_r$$

(r — число классов сопряженности группы G), которым соответствуют характеры

$$\chi_1, \ldots, \chi_r$$

размерностей

$$n_1, \ldots, n_r.$$

Таким образом, мы доказали, что

$$\rho = n_1\varphi_1 + \cdots + n_r\varphi_r,$$

откуда
$$\chi_\rho = n_1\chi_1 + \cdots + n_r\chi_r.$$
В частности,
$$|G| = \chi_\rho(e) = n_1\chi_1(e) + \cdots + n_r\chi_r(e) = n_1^2 + \cdots + n_r^2.$$
$\square$

ПРИМЕРЫ

Пример 1. Найдем все неприводимые комплексные представления группы диэдра $\mathbf{D}_n$.

Для начала найдем все одномерные представления.

Коммутант группы $\mathbf{D}_n$ — это подгруппа, порожденная поворотом a для нечетного n, и подгруппа, порожденная поворотом a^2, — для четного n.

Таким образом, для нечетных n фактор-группа по коммутанту изоморфна $\mathbb{Z}_2$, поэтому одномерных представлений ровно два: единичное (все элементы $\mathbf{D}_n$ отображаются в единицу) и такое, что повороты отображаются в единицу, а отражения — в -1.

Для четных n фактор-группа по коммутанту изоморфна группе $\mathbf{V}_4$. Таким образом, имеется четыре одномерных представления:

— единичное;

— такое, что все повороты переходят в 1, а отражения — в -1;

— такое, что все четные повороты переходят в 1, нечетные — в -1 отражения вида $a^{2k}b$ — в 1, отражения вида $a^{2k+1}b$ — в -1;

— такое, что все четные повороты переходят в 1, нечетные — в -1 отражения вида $a^{2k+1}b$ — в 1, отражения вида $a^{2k}b$ — в -1.

Теперь построим двухмерное неприводимое представление группы $\mathbf{D}_n$.

Поворот a переведем в матрицу

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & 0 \\ 0 & \xi_1^{-1} \end{pmatrix},$$

где ξ_1 — это некоторый корень из единицы n-й степени (не равный 1 или -1).

Отражение b переведем в матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда полученное отображение

$$\varphi : \mathbf{D}_n \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$$

является представлением, так как все соотношения на элементы a и b выполняются для образов этих элементов.

Заметим, что мы получили не одно представление, а целый класс представлений:

— если n нечетно, то мы таким способом получим $(n-1)/2$ не эквивалентных друг другу неприводимых двухмерных представлений (так как для двух не равных друг другу и не обратных друг другу корней n-й степени из единицы ξ_1, ξ_2 следы соответствующих матриц различны — $\xi_1 + 1/\xi_1 \neq \xi_2 + 1/\xi_2$);

— если n четно, то получим $(n-2)/2$ не экививалентных друг другу неприводимых двухмерных представлений (так как представления, для которых $\xi = 1$ или -1, приводимы).

Сумма квадратов размерностей всех найденных представлений равна порядку группы: для четного $n = 2k$ мы имеем 4 одномерных представления и $k-2$ двухмерных; для нечетного $n = 2k+1$ мы имеем два одмерных представления и k двухмерных.

Значит, мы нашли все неприводимые представления группы $\mathbf{D}_n$.

Пример 2. Теперь найдем все неприводимые представления группы подстановок $\mathbf{S}_4$.

Как мы уже знаем (так как коммутант $\mathbf{S}_4$ — это подгруппа $\mathbf{A}_4$ индекса два), что у группы $\mathbf{S}_4$ ровно два одномерных представления: единичное и представление "знак" (четные подстановки переходят в единицу, а нечетные — в -1.

У группы $\mathbf{S}_4$ пять классов сопряженных элементов, поэтому у данной группы ест три неприводимых представления размерности, большей одного. С другой стороны, размерности n_1, n_2, n_3 этих представлений удовлетворяют соотношению

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 22.$$

Ясно, что мы должны найти два трехмерных и одно двухмерное представление.

Двухмерное представление можно построить из следующего общего соображения.

Представим себе, что есть группа G, а у нее имеется нормальная подгруппа H.

Рассмотрим фактор-группу $G_1 = G/H$.

Любое неприводимое представление группы G_1 естественным образом достраивается до неприводимого представления группы G той же размерности: весь смежный класс gH в представлении группы G переходит туда же, куда в исходном представлении группы G' переходил этот же класс как элемент.

Таким образом, у группы $\mathbf{S}_4$ есть представление, продолженное из ее факторгруппы

$$\mathbf{S}_4/\mathbf{V}_4 \cong \mathbf{S}_3.$$

У группы $\mathbf{S}_3$ есть два одномерных представления (которые нам уже не нужны, так как мы их рассмотрели выше), а также одно двухмерное представление (описанное в предыдущем примере, так как $\mathbf{S}_3 \cong \mathbf{D}_3$).

Это представление и будет продолжено до двухмерного представления группы $\mathbf{S}_4$.

Чтобы найти первое из трехмерных представлений $\mathbf{S}_4$, вспомним, что $\mathbf{S}_4$ — это группа всех движений правильного тетраэдра.

Так как тетраэдр — трехмерная фигура, то движения записываются трехмерными матрицами, откуда следует, что мы получаем трехмерное представление группы $\mathbf{S}_4$.

Остается только показать, что данное представление неприводимо.

Действительно, если бы оно было приводимо, то было бы и вполне приводимо, то есть разложилось бы на два представления: двухмерное и одномерное. Это означает, что у представления существовала бы собственная прямая.

Однако у поворота вокруг оси, проходящей через вершину A тетраэдра $ABCD$, перпендикулярно плоскости BCD, инвариантна только эта ось, а у поворота вокруг оси, проходящей через B перпендикулярно плоскости ACD, единственная собственная прямая — это именно такая ось. Данные прямые не совпадают, откуда следует, что представление неприводимо.

Второе трехмерное неприводимое представление можно получить из того, что $\mathbf{S}_4$ изоморфно группе собственных движений куба. Данное представление неприводимо и тех же самых соображений, что и в предыдущем случае, при этом оно не может быть эквивалентно предыдущему представлению, так как все матрицы, ему соответствующие, обязательно имеют определитель 1 (так как являются собственными движениями), а при движениях тетраэдра возникают отражения, являющиеся несобственными движениями и имеющими определитель -1.

Упражнение 2. Пусть даны две конечные группы G_1 и G_2, для которых известны все их неприводимые представления. Как найти все неприводимые представления группы $G_1 \times G_2$?