ЛЕКЦИЯ 6

ПРИМЕРЫ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

ТОЧНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ АБЕЛЕВОЙ ГРУППЫ

ПРИМЕРЫ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

1) *Циклические группы* $G = \langle a \rangle$, поскольку $a^m a^n = a^{m+n} = a^n a^m$ для всех $m, n \in \mathbb{Z}$.

2) Прямые суммы $\bigoplus\limits_{i \in I} A_i$ и прямые произведения $\prod\limits_{i \in I} A_i$ абелевых групп A_i, $i \in I$, являются абелевыми группами.

3) *Аддитивная группа рациональных чисел* $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, +)$ (эта группа без кручения, она является делимой (для любого $a \in \mathbb{Q}$ и любого $n \in \mathbb{Z}$ уравнение $nx = a$ разрешимо в $\mathbb{Z}$) и по этой причине не является прямой суммой циклических групп).

4) *Квазициклическая группа* $\mathbb{Z}(p^\infty)$ — группа по умножению всех корней степени p^n, где p — фиксированное простое число, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

ТОЧНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Последовательность абелевых групп и гомоморфизмов

$$\ldots \xrightarrow{f_{i-1}} A_i \xrightarrow{f_i} A_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} A_{i+2} \to \ldots$$

называется *точной последовательностью*, если

$$\operatorname{Im} f_i = \ker f_{i+1} \; \forall i \in \mathbb{N},$$

и называется *комплексом* абелевых групп, если

$$f_{i+1} f_i = 0 \; \forall i \in \mathbb{N}$$

(это равносильно тому, что $\operatorname{Im} f_i \subseteq \ker f_{i+1}$, и поэтому в этом случае можно рассмотреть фактор-группу $D_{i+1} = \ker f_{i+1} / \operatorname{Im} f_i$, называемую $(i+1)$-*й группой гомологий* комплекса).

Следующие примеры точных последовательностей наиболее употребительны в нашем курсе:

1) точность последовательности

$$0 \to A \xrightarrow{i} B$$

означает, что $\ker i = 0$, т. е. i — инъективный гомоморфизм (мономорфизм);

2) точность последовательности

$$B \xrightarrow{\pi} C \to 0$$

означает, что $\operatorname{Im} \pi = C$, т. е. π — сюръективный гомоморфизм;

3) точность последовательности

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} C \to 0$$

означает, что $\ker i = 0$, $\operatorname{Im} i = \ker \pi$, $\operatorname{Im} \pi = C$, т. е. что $A \cong \operatorname{Im} i$, $B/\operatorname{Im} i = B/\ker\pi \cong C$ (в частности, для сюръективного гомоморфизма $f\colon A \to B$ имеем короткую точную последовательность

$$0 \to \ker f \subseteq A \xrightarrow{f} \operatorname{Im} f = B \to 0).$$

Лемма 1 (о ретракте абелевых групп)**.** *Пусть G и G' — абелевы группы.*

1) *Если $f\colon G \to G'$, $h\colon G' \to G$ — гомоморфизмы и $fh = 1_{G'}$ (пара f, h — ретракт), то*:

а) $\ker h = 0$;

б) $\operatorname{Im} f = G'$;

в) $\operatorname{Im} h \oplus \ker f = G$.

2) *Если $f\colon G \to G'$ — гомоморфизм,*

$$\operatorname{Im} f = G' \text{ и } A \oplus \ker f = G$$

для некоторой подгруппы $A \subseteq G$, то существует гомоморфизм $h\colon G' \to G$, для которого $fh = 1_{G'}$.

3) *Если $h\colon G' \to G$ — гомоморфизм,*

$$\ker h = 0 \text{ и } \operatorname{Im} h \oplus B = G$$

для некоторой подгруппы $B \subseteq G$, то существует гомоморфизм $f\colon G \to G'$, для которого $fh = 1_{G'}$.

Доказательство.

1а) Если $y \in \ker h \subseteq G'$, то $h(y) = 0$, и поэтому

$$y = 1_{G'}(y) = (fh)(y) = f\big(h(y)\big) = f(0) = 0.$$

Итак, $\ker h = 0$.

1б) Если $y \in G'$, то

$$y = 1_{G'}(y) = (fh)(y) = f\big(h(y)\big) \in \operatorname{Im} f.$$

Итак, $\operatorname{Im} f = G'$.

1в) Если $x \in G$, то $x = h\big(f(x)\big) + \big(x - (hf)(x)\big)$, при этом, поскольку $fh = 1_{G'}$,

$$f\big(x - (hf)(x)\big) = f(x) - (fhf)(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

поэтому $x - (hf)(x) \in \ker f$, $h\big(f(x)\big) \in \operatorname{Im} h$. Таким образом, $G = \operatorname{Im} h + \ker f$.

Если $z \in \operatorname{Im} h \cap \ker f$, то $z = h(y)$ для $y \in G'$ и $f(z) = 0$, поэтому

$$y = 1_{G'}(y) = (fh)(y) = f\big(h(y)\big) = f(z) = 0.$$

Таким образом, $\operatorname{Im} h \cap \ker f = 0$.

Итак, $G = \operatorname{Im} h \oplus \ker f$.

2) Так как для $f|_A\colon A\to G'$ имеем

$$f|_A(A)=f(A\oplus\ker f)=f(G)=G',$$
$$\ker(f|_A)=\ker f\cap A=0,$$

то $f|_A\colon A\to G'$ — изоморфизм.

Положим

$$h=(f|_A)^{-1}\colon G'\to A\subseteq G.$$

Тогда

$$fh=f(f|_A)^{-1}=1_{G'}.$$

3) Гомоморфизм $h\colon G'\to \operatorname{Im}h$ является изоморфизмом, поскольку $\ker h=0$. Рассмотрим изоморфизм $h^{-1}\colon \operatorname{Im}h\to G'$. Пусть $\pi\colon G=\operatorname{Im}h\oplus B\to\operatorname{Im}h$ — проекция на первое прямое слагаемое. Рассмотрим гомоморфизм

$$f=h^{-1}\pi\colon G=\operatorname{Im}h\oplus B\xrightarrow{\pi}\operatorname{Im}h\xrightarrow{h}G'.$$

Тогда для $g'\in G'$ имеем

$$(fh)(g')=f\big(h(g')\big)=h^{-1}\Big(\pi\big(h(g')\big)\Big)=h^{-1}\big(h(g')\big)=g'.$$

Таким образом, $fh=1_{G'}$. $\square$

Теорема 1 (условия расщепления короткой точной последовательности абелевых групп)**.** *Пусть*

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} C \to 0$$

— *короткая точная последовательность абелевых групп* ($\ker i = 0,\ \operatorname{Im} i = \ker \pi,\ \operatorname{Im} \pi = C$). *Тогда эквивалентны следующие условия*:

1) *существует гомоморфизм* $j\colon B \to A$, *для которого* $ji = 1_A$ (*расщепляемость последовательности слева*);

2) *существует гомоморфизм* $\rho\colon C \to B$, *для которого* $\pi\rho = 1_C$ (*расщепляемость последовательности справа*).

Доказательство. а) Пусть выполнено условие 1). Тогда в силу леммы о ретракте (п. 1с) для ретракта

$$i : A \to B,\ j : B \to A, \quad ji = 1_A,$$

имеем:

$$\operatorname{Im} i \oplus \ker j = B.$$

Так как $\operatorname{Im} i = \ker \pi$, то

$$\ker \pi \oplus \ker j = B.$$

Это позволяет применить к гомоморфизму $\pi\colon B \to C$ ($\operatorname{Im} \pi = C$, $\ker j \oplus \ker \pi = B$) лемму о ретракте. Тогда существует гомоморфизм $\rho\colon C \to B$, для которого $\pi\rho = 1_C$. Таким образом, из 1) следует 2).

б) Пусть выполнено условие 2). Применяя к ретракту

$$\pi : B \to C,\ \rho : C \to B, \quad \pi\rho = 1_C,$$

лемму о ретракте (п. 1с), имеем $\operatorname{Im}\rho \oplus \ker\pi = B$.

Так как $\operatorname{Im} i = \ker\pi$, то $\operatorname{Im} i \oplus \operatorname{Im}\rho = B$.

Это позволяет применить к гомоморфизму $i\colon A \to B$ ($\ker i = 0$, $\operatorname{Im} i \oplus \operatorname{Im}\rho = B$) лемму о ретракте (п. 3).

Тогда существует гомоморфизм $j\colon B \to A$, для которого $ji = 1_A$.

Таким образом, из 2) следует 1). $\square$

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ АБЕЛЕВОЙ ГРУППЫ

Как мы видели, совокупность

$$\mathbf{T}(G) = \{g \in G \mid O(g) < \infty\}$$

элементов некоммутативной группы может не быть подгруппой (например, $\mathbf{T}(\operatorname{GL}_2(\mathbb{Z}))$). Для абелевых групп A элементы конечного порядка образуют подгруппу, называемую *периодической частью* группы A. Периодическая часть $\mathbf{T}(A)$ абелевой группы — важный инвариант группы A.

Если $\mathbf{T}(A) = 0$ (в группе A все ненулевые элементы имеют бесконечный порядок), то будем говорить, что группа A — без кручения.

Теорема 2. *Пусть A — абелева группа,*

$$\mathbf{T}(A) = \{a \in A \mid O(a) < \infty\} -$$

ее периодическая часть. Тогда:

1) $\mathbf{T}(A)$ — *периодическая подгруппа группы* A;

2) $\mathbf{T}\big(A/\mathbf{T}(A)\big) = 0$ (*другими словами,* $A/\mathbf{T}(A)$ — *группа без кручения*).

Доказательство. 1) Если $a, b \in \mathbf{T}(A)$, $ra = 0 = sb$, $r > 0$, $s > 0$, $r, s \in \mathbb{N}$, то

$$rs(a+b) = s(ra) + r(sb) = 0 + 0 = 0, \quad r, s > 0,$$
$$r(-a) = -ra = 0, \quad r > 0,$$

и поэтому $a + b \in \mathbf{T}(A)$, $-a \in \mathbf{T}(A)$. Таким образом, $\mathbf{T}(A)$ — подгруппа группы A. Конечно, $\mathbf{T}(A)$ — периодическая группа.

2) Если $a + \mathbf{T}(A) \in \mathbf{T}(A/\mathbf{T}(A))$, то

$$s\big(a + \mathbf{T}(A)\big) = sa + \mathbf{T}(A) = \bar{0} = \mathbf{T}(A), \quad s > 0,$$

поэтому $sa \in \mathbf{T}(A)$. Следовательно,

$$r(sa) = (rs)a = 0, \quad r > 0.$$

Так как $rs > 0$, то $a \in \mathbf{T}(A)$, и поэтому $a + \mathbf{T}(A) = \mathbf{T}(A) = \bar{0}$. Итак, $\mathbf{T}\big(A/\mathbf{T}(A)\big) = \bar{0}$. □

Замечание 1. Эта теорема объясняет, почему структурная теория абелевых групп разбивается на три части:

1-я часть посвящена изучению периодических абелевых групп (когда $\mathbf{T}(A) = A$);

2-я часть заключается в изучении абелевых групп A без кручения (когда $\mathbf{T}(A) = 0$);

3-я часть анализирует в общем случае расширение

$$0 \to \mathbf{T}(A) \to A \to A/\mathbf{T}(A) \to 0$$

периодической группы A с помощью группы $A/\mathbf{T}(A)$ без кручения.

ПРИМАРНЫЕ КОМПОНЕНТЫ

Теорема 3 (о разложении периодической абелевой группы в прямую сумму примарных компонент)**.** *Пусть A — периодическая абелева группа.*

1) *Если p — простое число,*

$$A_p = \{a \in A \mid O(a) = p^k,\ k \geqslant 1\}$$

— p-примарная компонента *группы A, то A_p — подгруппа группы A;*

2) $A = \bigoplus\limits_p A_p$;

3) *если $A = \bigoplus\limits_p A'_p$, где A'_p — абелева p-группа (т. е. все ненулевые элементы группы A'_p имеют порядки, являющиеся степенями простого числа p), то $A'_p = A_p$.*

Доказательство.

1) Если $x, y \in A_p$, $p^m x = 0$, $p^n y = 0$, $m \geq 1$, $n \geq 1$, $t = \max(m, n)$, то:

$$p^t(x+y) = p^t x + p^t y = 0 + 0 = 0,$$
$$p^m(-x) = -p^m x = 0,$$

и поэтому $x + y, -x \in A_p$. Таким образом, A_p — подгруппа группы A.

2) Если $a \in A$ и $n = O(a) = p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$, где $p_1, \dots, p_r$ — различные простые числа, то числа $\langle n_i = n/p_i^{k_i} \rangle$ взаимно просты, и поэтому

$$1 = t_1 n_1 + \ldots + t_r n_r, \quad t_i \in \mathbb{Z}.$$

Тогда

$$a = 1 \cdot a = \sum_{i=1}^{r} t_i(n_i a),$$

где $n_i a \in A_{p_i}$, поскольку $p_i^{k_i}(n_i a) = na = 0$. Таким образом,

$$a \in \sum_{i=1}^{r} A_{p_i} \subseteq \sum_{p} A_p.$$

Итак, $A = \sum\limits_{p} A_p$.

Если

$$b \in A_{p_1} + \ldots + A_{p_k},$$

то

$$O(b) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{l_i}, \quad l_i \geq 0.$$

Если $q \notin \{p_1, \ldots, p_k\}$ — другое простое число, отличное от p_i, то

$$A_q \cap (A_{p_1} + \ldots + A_{p_k}) = 0.$$

Итак,

$$A = \bigoplus_p A_p$$

3) Ясно, что $A'_p \subseteq A_p$ для любого простого числа p (A_p содержит все элементы, порядки которых являются степенями простого числа p).

Если $0 \neq x \in \bigoplus\limits_p A'_p$, то

$$x = x_{p_1} + \ldots + x_{p_k} \in \sum_i A'_{p_i}, \quad x_{p_i} \neq 0,$$

и поэтому $O(x) = p_1^{l_1} \ldots p_k^{l_k}$, $l_i \geq 1$. Если $0 \neq x \notin A'_p$, то найдется $p_i \neq p$ (иначе $x = x_p \in A'_p$), и тогда $x \notin A_p$, поскольку в A_p все элементы имеют своими порядками степени простого числа p.

Итак, $A'_p = A_p$. $\square$

В силу доказанной теоремы теория периодических абелевых групп сводится к теории примарных абелевых групп.

Теорема 4. *Конечно порожденная периодическая абелева группа конечна.*

Доказательство. Пусть $A = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ — периодическая абелева группа, порожденная элементами $a_1, \ldots, a_n$, $O(a_i) = m_i < \infty$. Если $a \in A$, то

$$a = k_1 a_1 + \ldots + k_n a_n, \quad 0 \leqslant k_i < m_i,$$

и поэтому $|A| \leqslant m_1 m_2 \ldots m_n$. □

Замечание 2. Для неабелевых периодических групп одной из основных была следующая проблема Бернсайда: конечна ли конечно порожденная группа G, в которой $x^n = e$ для всех $x \in G$? Отрицательное решение было получено С. И. Адяном и П. С. Новиковым.