ЛЕКЦИЯ 7

СУЩЕСТВОВАНИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ КОНЕЧНОЙ АБЕЛЕВОЙ ГРУППЫ

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ КОНЕЧНОЙ АБЕЛЕВОЙ ГРУППЫ

СВОБОДНЫЕ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ

КОНЕЧНЫЕ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ

Классификация (с точностью до изоморфизма) конечных абелевых групп воспринималась как один из триумфов алгебры XIX века и сразу нашла приложения в алгебре, теории чисел, топологии, комбинаторике. В каком-то смысле это уникальный факт теории абелевых групп, то, что удалось конструктивно описать строение конечных объектов. Совсем не такая простая ситуация с классификацией конечных объектов как в теории некоммутативных групп (отметим лишь один из самых крупных математических проектов, связанный с классификацией конечных простых групп), так и в теории колец (описание строения конечных полей — это лишь начало загадочной истории об описании строения конечных колец).

Теорема 1 (о разложении конечной абелевой группы в прямую сумму примарных компонент)**.** *Пусть A — конечная абелева группа порядка $|A| = n = p_1^{r_1} \ldots p_t^{r_t}$, где $p_1, \ldots, p_t$ — различные простые числа, $r_i \geqslant 1$. Тогда:*

1) $A = A_{p_1} \oplus \ldots \oplus A_{p_t}$, *где* $|A_{p_i}| = p_i^{r_i}$;

2) *это прямое разложение конечной абелевой группы A единственно, а именно если $A = B_1 \oplus \ldots \oplus B_t$, где $|B_i| = p_i^{r'_i}$, то $r'_i = r_i$ для всех $1 \leqslant i \leqslant t$, и $B_i = A_{p_i}$.*

Доказательство, конечно, непосредственно следует из теоремы **??** о разложении любой периодической абелевой группы в прямую сумму примарных компонент. $\square$

Замечание 1. Данная теорема сводит изучение конечных абелевых групп к рассмотрению их примарных компонент, являющихся конечными примарными абелевыми группами.

В следующей ключевой лемме мы сосредоточим внимание уже на конечной примарной абелевой группе.

Лемма 1. *Пусть A — конечная абелева p-группа, $a \in A$ — элемент с максимальным порядком $O(a) = p^r$ в группе A. Тогда $A = \langle a \rangle \oplus H$ для некоторой подгруппы H (другими словами, циклическая подгруппа $\langle a \rangle$, порожденная элементом a, является прямым слагаемым группы A).*

Доказательство. Выберем в нашей конечной группе A максимальную подгруппу H среди всех подгрупп со свойством $H \cap \langle a \rangle = 0$.

Рассмотрим подгруппу $\langle H, a \rangle = H \oplus \langle a \rangle = A_0$. Если $A_0 = A$, то наша лемма доказана.

Допустим теперь, что $A_0 \neq A$, и приведем это предположение к противоречию. Так как $A_0 \neq A$, то выберем в $A \setminus A_0$ элемент x *наименьшего порядка.* Так как в p-группе A

$$O(px) = \frac{O(x)}{p} < O(x),$$

то $px \in A_0 = \langle a \rangle \oplus H$, и поэтому

$$px = la + y, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad y \in H.$$

Так как p^r — наибольший порядок элементов нашей p-группы A, то

$$p^{r-1}la + p^{r-1}y = p^{r-1}(px) = p^r x = 0.$$

Следовательно,

$$p^{r-1}la = -p^{r-1}y \in \langle a \rangle \cap H = 0.$$

Поэтому $p^{r-1}l$ делится на $p^r = O(a)$, и тогда $l = pq$. Таким образом,

$$px = la + y = pqa + y,$$

и поэтому

$$p(x - qa) = y \in H.$$

Но $x - qa \notin H$, поскольку если $x - qa \in H$, то

$$x \in qa + H \subseteq \langle a \rangle + H = A_0,$$

что противоречит выбору элемента $x \notin A_0$.

Итак,

$$H < \langle x - qa \rangle + H,$$

поэтому в силу максимальности выбора подгруппы H

$$(\langle x - qa \rangle + H) \cap \langle a \rangle \neq 0.$$

Следовательно, найдутся числа $k, m \in \mathbb{Z}$ и элемент $y' \in H$, для которых

$$m(x - qa) + y' = ka \neq 0.$$

Отсюда следует, что

$$mx - mqa + y' = ka,$$

и поэтому

$$mx = (mq + k)a - y' \in \langle a \rangle + H = A_0.$$

Если p делит число m, $m = pt$, то, поскольку

$$p(x - qa) = y \in H,$$

имеем

$$m(x - qa) = tp(x - qa) = ty \in H,$$

и поэтому

$$ka = m(x - qa) + y' \in H + H = H.$$

Итак, $ka \in \langle a \rangle \cap H = 0$, но это противоречит тому, что $ka \neq 0$.

Следовательно, m не делится на p, и поэтому

$$1 = (p, m) = up + vm, \quad u, v \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку $px \in A_0$ и $mx \in A_0$, приходим к противоречию с выбором элемента x:

$$x = (up + vm)x = u(px) + v(mx) \in A_0 + A_0 = A_0. \qquad \square$$

В качестве непосредственного следствия леммы получаем теорему о строении конечной абелевой p-группы.

Теорема 2. 1) *Каждая конечная абелева p-группа A, $|A| = p^r$, $r \geqslant 1$, разлагается в прямую сумму p-примарных циклических групп (далее не разложимых в прямую сумму)*

$$A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_k, \quad A_i = \langle a_i \rangle, \ \ O(a_i) = p_i^{c_i}, \ \ 1 \leqslant c_1 \leqslant \ldots \leqslant c_k,$$
$$|A| = p^r = p^{c_1+c_2+\ldots+c_k}, \quad r = c_1 + c_2 + \ldots + c_k,$$
$$A \cong \mathbb{Z}_{p^{c_1}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p^{c_k}}.$$

2) *последовательность* элементарных делителей

$$p^{c_1}, \ldots, p^{c_k}, \quad c_1 \leqslant c_2 \leqslant \ldots \leqslant c_k$$

(*совпадающая в этом случае с последовательностью инвариантных множителей $1 \leqslant d_1 = p^{c_1} \mid d_2 = p^{c_2} \mid \ldots \mid d_k = p^{c_k}$) определена однозначно, а именно: если*

$$A \cong \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{Z}_{p^{c_i}} \cong \bigoplus_{j=1}^{l} \mathbb{Z}_{p^{c'_j}},$$
$$1 \leqslant c_1 \leqslant \ldots \leqslant c_k, \ \ 1 \leqslant c'_1 \leqslant \ldots \leqslant c'_l,$$

то $k = l$, $c_1 = c'_1, \ldots, c_k = c'_k$.

Доказательство.

1) В силу доказанной леммы:

$$A = \langle a \rangle \oplus H, \quad a \in A,$$

$O(a)$ — максимальный порядок элементов группы A. Проведем индукцию по $|A|$.

Пусть, в силу индуктивного предположения,

$$H = A_1 \oplus \ldots \oplus A_{k-1}, \quad A_i = \langle a_i \rangle,\ O(a_i) = p^{c_i},\ 1 \leqslant c_1 \leqslant \ldots \leqslant c_{k-1},$$

при этом $p^{c_{k-1}} \leqslant O(a)$. Полагая $a_k = a$, $p^{c_k} = O(a)$, $A_k = \langle a \rangle$, получаем, что

$$\begin{gathered} A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_{k-1} \oplus A_k, \\ A_i = \langle a_i \rangle, \quad O(a_i) = p^{c_i}, \quad 1 \leqslant c_1 \leqslant \ldots \leqslant c_{k-1} \leqslant c_k, \end{gathered}$$

и следовательно,

$$\begin{gathered} |A| = p^r = p^{c_1 + c_2 + \ldots + c_k}, \quad r = c_1 + \ldots + c_k, \\ A \cong \mathbb{Z}_{p^{c_1}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p^{c_k}}. \end{gathered}$$

Как мы отмечали, прямые слагаемые $A_i \cong \mathbb{Z}_{p^{c_i}}$, являющиеся примарными циклическими группами, далее в нетривиальную прямую сумму уже не разлагаются.

2a) Пусть

$$A \cong \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{Z}_{p^{c_i}} \cong \bigoplus_{j=1}^{l} \mathbb{Z}_{p^{c'_j}},$$
$$1 \leqslant c_1 \leqslant \ldots \leqslant c_k, \quad 1 \leqslant c'_1 \leqslant \ldots \leqslant c'_l.$$

Для доказательства равенства $k = l$ вычислим, используя эти два прямых разложения, подгруппу $A[p] = \{x \in A \mid px = 0\}$ группы A, зная, что

$$\left(\bigoplus_{i=1}^{k} A_i\right)[p] = \bigoplus_{i=1}^{k} A_i[p]$$

и

$$(\mathbb{Z}_{p^t})[p] \cong \mathbb{Z}_p$$

(см. **??**):

$$A[p] \cong \bigoplus_{i=1}^{k} (\mathbb{Z}_{p^{c_i}})[p] \cong \underbrace{\mathbb{Z}_p \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_p}_{k},$$
$$A[p] \cong \bigoplus_{j=1}^{l} (\mathbb{Z}_{p^{d_j}})[p] \cong \underbrace{\mathbb{Z}_p \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_p}_{l}.$$

Поэтому $|A[p]| = p^k = p^l$, и следовательно, $k = l$.

2б) Допустим противное, т. е. что последовательности $(c_1, \ldots, c_k)$ и $(c'_1, \ldots, c'_k)$, $k = l$, различны.

Пусть u — такой индекс, что

$$c_1 = c'_1, \ldots, c_{u-1} = c'_{u-1}, c_u \neq c'_u,$$

скажем $c_u < c'_u$.

Так как $p^{c_u}\mathbb{Z}_{p^{c_i}} = 0$ для $c_i \leqslant c_u$, то, используя первое разложение и **??**, получаем

$$p^{c_u}A \cong \bigoplus_{i=1}^{k} p^{c_u}\mathbb{Z}_{p^{c_i}} \cong \bigoplus_{i=u+1}^{k} \mathbb{Z}_{p^{c_i - c_u}},$$

где

$$c_{u+1} - c_u \leqslant c_{u+2} - c_u \leqslant \ldots \leqslant c_k - c_u$$

(здесь $k - u$ ненулевых прямых слагаемых).

Поскольку $c_i = c'_i$ для $i < u$ и $c_u < c'_u$, то, используя второе разложение, получаем

$$p^{c_u}A \cong \bigoplus_{j=1}^{k=l} p^{c_u}\mathbb{Z}_{p^{c'_j}} \cong \bigoplus_{i=u}^{k=l} \mathbb{Z}_{p^{c'_j - c_u}},$$

где

$$1 \leqslant c'_u - c_u \leqslant c'_{u+1} - c_u \leqslant \ldots \leqslant c'_k - c_u, \quad k = l$$

(здесь $k - (u-1) = (k-u) + 1$ ненулевых прямых слагаемых).

Таким образом, для конечной абелевой p-группы $p^{c_u}A$ получили два разложения в прямую сумму ненулевых p-примарных циклических групп, содержащих разное число слагаемых ($k-u$ и $(k-u)+1$ соответственно), что невозможно в силу уже доказанного утверждения 2а). Тем самым мы пришли к противоречию, что завершает доказательство. $\square$

Теперь мы готовы собрать вместе все полученные факты, сформулировать и доказать основную теорему о конечных абелевых группах.

Теорема 3 (о строении и классификации конечных абелевых групп)**.**

1) *Конечная абелева группа* A *порядка* $n = |A| = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_t^{r_t}$, *где* $\{p_1, p_2, \dots, p_t\}$ — *все различные простые делители числа* n, $r_i \geqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant t$, *разлагается в прямую сумму примарных циклических групп*

$$A = \bigoplus_{i=1}^{t} \Bigl(\bigoplus_{j=1}^{k_i} A_{ij} \Bigr), \quad A_{ij} = \langle a_{ij} \rangle, \quad O(a_{ij}) = p_i^{c_{ij}},$$

где

$$\begin{cases} 1 \leqslant c_{11} \leqslant c_{12} \leqslant \dots \leqslant c_{1k_1}, \\ \dots \\ 1 \leqslant c_{t1} \leqslant c_{t2} \leqslant \dots \leqslant c_{tk_t}, \end{cases}$$

$$n = |A| = p_1^{c_{11} + \dots + c_{1k_1}} p_2^{c_{21} + \dots + c_{2k_2}} \dots p_t^{c_{t1} + \dots + c_{tk_t}} = \prod_{i=1}^{t} \prod_{j=1}^{k_i} p_i^{c_{ij}},$$

$$r_1 = c_{11} + \dots + c_{1k_1}, \dots, \ r_t = c_{t1} + \dots + c_{tk_t}.$$

Таким образом,

$$A \cong \bigoplus_{i=1}^{t} \Bigl(\bigoplus_{j=1}^{k_j} \mathbb{Z}_{p_j^{c_{ij}}} \Bigr).$$

2) *Таблица элементарных делителей*

$$
\begin{array}{ll}
p_1^{c_{11}}, p_1^{c_{12}}, \ldots, p_1^{c_{1k_1}}, & 1 \leqslant c_{11} \leqslant c_{12} \leqslant \ldots \leqslant c_{1k_1}, \\
p_2^{c_{21}}, p_2^{c_{22}}, \ldots, p_2^{c_{2k_2}}, & 1 \leqslant c_{21} \leqslant c_{22} \leqslant \ldots \leqslant c_{2k_2}, \\
\ldots & \\
p_t^{c_{t1}}, p_t^{c_{t2}}, \ldots, p_t^{c_{tk_t}}, & 1 \leqslant c_{t1} \leqslant c_{t2} \leqslant \ldots \leqslant c_{tk_t},
\end{array}
$$

прямого разложения в п. 1) *определена однозначно и однозначно определяет конечную абелеву группу* A (*с точностью до изоморфизма*).

Доказательство.

1) В силу теоремы о разложении конечной абелевой группы A, $|A| = p_1^{r_1} \dots p_t^{r_t}$, имеем

$$A = \bigoplus_{i=1}^{t} A_{p_i}, \quad |A_{p_i}| = p_i^{r_i}.$$

Применяя к каждой конечной абелевой p_i-группе A_{p_i} теорему 2 о строении конечных абелевых p-групп, получаем

$$A_{p_i} = \bigoplus_{j=1}^{k_i} A_{ij}, \quad A_{ij} = \langle a_{ij} \rangle, \ \ O(a_{ij}) = p_i^{c_{ij}},$$

где

$$1 \leqslant c_{i1} \leqslant c_{i2} \leqslant \ldots \leqslant c_{ik_i}, \quad |A_{p_i}| = p_i^{c_{i1}+\ldots+c_{ik_i}} = p_i^{r_i}.$$

Таким образом,

$$A = \bigoplus_{i=1}^{t} \Big(\bigoplus_{j=1}^{k_i} A_{ij} \Big), \quad A_{ij} = \langle a_{ij} \rangle, \ \ O(a_{ij}) = p_i^{c_{ij}},$$

$$\begin{cases} 1 \leqslant c_{11} \leqslant c_{12} \leqslant \ldots \leqslant c_{1k_1}, \\ \ldots \\ 1 \leqslant c_{t1} \leqslant c_{t2} \leqslant \ldots \leqslant c_{tk_t}, \end{cases}$$

$$n = |A| = p_1^{r_1} \dots p_t^{r_t} = p_1^{c_{11}+\ldots+c_{1k_1}} p_2^{c_{21}+\ldots+c_{2k_2}} \dots p_t^{c_{t1}+\ldots+c_{tk_t}},$$

поэтому

$$r_1 = c_{11} + \ldots + c_{1k_1}, \ldots, \ r_t = c_{t1} + \ldots + c_{tk_t}.$$

Отсюда следует, что

$$A \cong \bigoplus_{i=1}^{t} \Big(\bigoplus_{j=1}^{k_i} \mathbb{Z}_{p_i^{c_{ij}}} \Big).$$

2) Пусть

$$
\begin{aligned}
&p_1^{d_{11}}, p_1^{d_{12}}, \ldots, p_1^{d_{1l_1}}, \quad 1 \leqslant d_{11} \leqslant d_{12} \leqslant \ldots \leqslant d_{1l_1},\\
&p_2^{d_{21}}, p_2^{d_{22}}, \ldots, p_2^{d_{2l_2}}, \quad 1 \leqslant d_{21} \leqslant d_{22} \leqslant \ldots \leqslant d_{2l_2},\\
&\ldots\\
&p_t^{d_{t1}}, p_t^{d_{t2}}, \ldots, p_t^{d_{tl_t}}, \quad 1 \leqslant d_{t1} \leqslant d_{t2} \leqslant \ldots \leqslant d_{tl_t},
\end{aligned}
$$

— таблица элементарных делителей другого разложения конечной абелевой группы A в прямую сумму примарных циклических групп,

$$
A = \bigoplus_{i=1}^{t} \Big(\bigoplus_{j=1}^{l_i} A'_{ij} \Big), \quad A'_{ij} = \langle a'_{ij} \rangle, \quad O(a'_{ij}) = p_i^{d_{ij}},
$$

$$
n = |A| = p_1^{r_1} \ldots p_t^{r_t} = p_1^{d_{11}+\ldots+d_{1l_1}} p_2^{d_{21}+\ldots+d_{2l_2}} \ldots p_t^{d_{t1}+\ldots+d_{tl_t}},
$$

$$
r_1 = d_{11} + \ldots + d_{1l_1}, \ldots, \; r_t = d_{t1} + \ldots + d_{tl_t}.
$$

Для каждого простого числа $p_i \in \{p_1, \ldots, p_t\}$ вычислим однозначно определенную p_i-примарную компоненту A_{p_i} конечной абелевой группы A_i по первому и второму разложениям (см. теорему о единственности разложения в сумму примарных абелевых групп по разным простым числам):

$$
A_{p_i} = \bigoplus_{j=1}^{k_i} A_{ij} = \bigoplus_{j=1}^{l_i} A'_{ij},
$$

$$
|A_{ij}| = p_i^{c_{ij}}, \quad |A'_{ij}| = p_i^{d_{ij}}, \quad 1 \leqslant c_{i1} \leqslant \ldots \leqslant c_{ik_i}, \quad 1 \leqslant d_{i1} \leqslant \ldots \leqslant d_{il_i},
$$

$$
|A_{p_i}| = p_i^{r_i} = p_i^{c_{i1}+\ldots+c_{ik_i}} = p_i^{d_{i1}+\ldots+d_{il_i}}.
$$

К p_i-примарной конечной абелевой группе A_{p_i} применим теорему о единственности последовательности элементарных делителей):

$$k_i = l_i, \quad c_{i1} = d_{i1}, \ldots, \ c_{ik_i} = d_{ik_i} = d_{il_i}.$$

Таким образом, таблица элементарных делителей, определяющая разложение конечной абелевой группы в прямую сумму примарных циклических групп, определена однозначно. Ясно, что две прямые суммы примарных циклических групп с одной и той же таблицей элементарных делителей изоморфны. $\square$

СВОБОДНЫЕ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ

Совокупность элементов $\{e_1, \ldots, e_m\}$ абелевой группы F называется *базисом*, если:

1) любой элемент $a \in F$ является целочисленной линейной комбинацией

$$a = k_1 e_1 + \ldots + k_m e_m, \quad k_i \in \mathbb{Z};$$

2) совокупность элементов $\{e_1, \ldots, e_m\}$ линейно независима над $\mathbb{Z}$: если

$$l_1 e_1 + \ldots + l_m e_m, \quad l_i \in \mathbb{Z},$$

то

$$l_1 = l_2 = \ldots = l_m = 0.$$

Замечание 2. а) Из условий 1) и 2) следует, что если

$$a = k_1 e_1 + \ldots + k_n e_n = k'_1 e_1 + \ldots + k'_n e_n, \quad k_i, k'_i \in \mathbb{Z},$$

то

$$k_1 = k'_1, \ldots, \ k_n = k'_n.$$

Действительно,

$$0 = (k_1 - k'_1)e_1 + \ldots + (k_n - k'_n)e_n,$$

в силу 2)

$$k_1 - k'_1 = 0, \ldots, \ k_n - k'_n = 0.$$

б) Из 1) и 2′) следует 2). *Действительно,*

$$l_1 e_1 + \ldots + l_n e_n = 0 = 0 \cdot e_1 + \ldots + 0 \cdot e_n,$$

в силу 2′)

$$l_1 = 0, \ldots, \ l_n = 0.$$

в) Таким образом, системы условий $\{1), \ 2)\}$ и $\{1), \ 2')\}$ равносильны, при этом отображение

$$a = k_1 e_1 + \ldots + k_n e_n \in F \mapsto (k_1, \ldots, k_n) \in \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{n}$$

является изоморфизмом,

$$F \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{n}.$$

Если абелева группа F обладает базисом $\{e_1, \ldots, e_n\}$, то она называется *свободной абелевой группой.*

Лемма 2. *Если* $\{e_1, \ldots, e_m\}$ *и* $\{f_1, \ldots, f_n\}$ *— два базиса свободной абелевой группы* F*, то* $m = n$ *(это число* n *называется* рангом *свободной абелевой группы* F*, обозначение*: $m = n = \mathrm{rk}\,(F)$, $F = F_n$*).*

Доказательство. Если $f\colon G \to G'$ — изоморфизм абелевых групп, то $f(2G) = 2f(G) = 2G'$, и поэтому отображение

$$\bar{f}\colon G/2G \to G'/2G', \quad x + 2G \mapsto f(x) + 2G',$$

является изоморфизмом групп.

Так как

$$F \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{m} \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{n},$$

то

$$2F \cong \underbrace{2\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus 2\mathbb{Z}}_{m} \cong \underbrace{2\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus 2\mathbb{Z}}_{n},$$

и поэтому

$$F/2F \cong \underbrace{\mathbb{Z}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_2}_{m} \cong \underbrace{\mathbb{Z}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_2}_{n}.$$

Таким образом, $2^m = 2^n$, следовательно, $m = n$. $\square$

Лемма 3. *Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — один из базисов свободной абелевой группы F_n ранга n, A — абелева группа, $f, g\colon F_n \to A$ — два гомоморфизма такие, что $f(e_i) = g(e_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда $f = g$.*

Доказательство. Для любого $x \in F_n$ имеем

$$x = k_1 e_1 + \ldots + k_n e_n, \quad k_i \in \mathbb{Z},$$

поэтому

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} k_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} k_i g(e_i) = g(x).$$

Итак, $f = g$. □

Лемма 4. $F = F_m \oplus F_n \cong F_{m+n}$.

Доказательство. Пусть $\{e_1, \ldots, e_m\}$, $\{f_1, \ldots, f_n\}$ — базисы свободных абелевых групп F_m и F_n соответственно. Тогда $\{e_1, \ldots, e_m, f_1, \ldots, f_n\}$ — базис абелевой группы $F_m \oplus F_n$.

Действительно, если $a \in F_m \oplus F_n$, то $a = b + c$, где $b \in F_m$, $c \in F_n$. Поэтому

$$b = k_1 e_1 + \ldots + k_m e_m, \quad c = l_1 f_1 + \ldots + l_n f_n, \quad k_i, l_j \in \mathbb{Z},$$

и следовательно,

$$a = b + c = k_1 e_1 + \ldots + k_m e_m + l_1 f_1 + \ldots + l_n f_n.$$

Если же

$$t_1 e_1 + \ldots + t_m e_m + t_{m+1} f_1 + \ldots + t_{m+n} f_n = 0,$$

то

$$t_1 e_1 + \ldots + t_m e_m = -(t_{m+1} f_1 + \ldots + t_{m+n} f_n) \in F_m \cap F_n = 0,$$

и поэтому

$$t_1 = \ldots = t_m = t_{m+1} = \ldots = t_{m+n} = 0.$$

Таким образом, $\mathrm{rk}\,(F) = m + n$, $F \cong F_{m+n}$. $\square$

Теорема 4. *Свободная абелева группа F (в частности, свободная абелева группа конечного ранга $F = F_n$) является группой без кручения, т. е. $\mathbf{T}(F) = 0$.*

Доказательство. Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис свободной абелевой группы $F = F_n$ и

$$a = k_1 e_1 + \ldots + k_n e_n \in \mathbf{T}(F), \quad k_i \in \mathbb{Z}.$$

Если $ra = 0$ для $0 < r \in \mathbb{Z}$, то

$$ra = (rk_1)e_1 + \ldots + (rk_n)e_n = 0.$$

Следовательно,

$$rk_1 = \ldots = rk_n = 0.$$

Так как $r > 0$, то $k_1 = \ldots = k_n = 0$.

Таким образом,

$$a = k_1 e_1 + \ldots + k_n e_n = 0.$$

Итак, мы показали, что $\mathbf{T}(F_n) = 0$.

В общем случае надо отметить лишь, что если $0 \neq a \in F$, то $a \in F_n \subset F$. $\square$