ЛЕКЦИЯ 9

ДЕЙСТВИЯ ГРУППЫ НА МНОЖЕСТВЕ (ПОЛИГОНЫ)

ЦЕНТР КОНЕЧНОЙ p-ГРУППЫ

ПЕРВАЯ И ВТОРАЯ ТЕОРЕМЫ СИЛОВА

ДЕЙСТВИЯ ГРУППЫ НА МНОЖЕСТВЕ (ПОЛИГОНЫ)

Различные группы преобразований дают естественные и многочисленные примеры действия групп на множествах. Это обосновывает рассмотрение *левого полигона M над группой G* (или *левого G-полигона*, обозначение M_G): множества M и отображения $G \times M \to M$, при котором $(g, m) \to gm$, $m \in M$, $g \in G$, при этом

1) $(gh)m = g(hm)$ для всех $m \in M$, $g, h \in G$;
2) $em = m$ для $m \in M$ и нейтрального элемента $e \in G$.

Если $\mathbf{S}(M)$ — группа подстановок на множестве M, т. е. группа всех биекций $\sigma\colon M \to M$ с операцией композиции, то задание структуры полигона M_G равносильно заданию гомоморфизма групп

$$\varphi\colon G \to \mathbf{S}(M).$$

Определение 1. *Орбитой* элемента m полигона M_G над группой G назовем следующее подмножество в M:

$$\operatorname{Orb}(m) = \{gm \mid g \in G\}\ (= Gm).$$

Замечание 1. $y \in \operatorname{Orb}(m) \iff \operatorname{Orb}(y) = \operatorname{Orb}(m)$.

Действительно, если $y = gm$, то $hy = hgm$ для $h \in G$, т. е. $Gy \subseteq Gm$. Так как $m = g^{-1}y$, то $Gm \subseteq Gy$. Итак, $Gy = Gm$. Если $Gy = Gm$, то $y = ey \in Gy = Gm$.

Замечание 2. Отношение $y \sim x \iff y = gx,\ g \in G$ (т. е. $y \sim x \iff \mathrm{Orb}\,(y) = \mathrm{Orb}\,(x)$) является отношением эквивалентности.

Действительно,

1) $x = ex$, т. е. $x \sim x$;

2) если $z \sim y$, $y \sim x$, т. е. $z = hy$, $y = gx$, $h, g \in G$, то $z = hgx$, т. е. $z \sim x$;

3) если $y \sim x$, т. е. $y = gx$, $g \in G$, то $x = g^{-1}y$, т. е. $x \sim y$.

Теорема 1 (разбиение на непересекающиеся орбиты)**.** *Если M_G — полигон над группой G, то M_G является объединением непересекающихся орбит: $M_G = \dot{\bigcup\limits_i} \mathrm{Orb}\,(m_i)$, где m_i — представители орбит (т. е. выбранные по одному элементу в каждой орбите).*

Следствие 1. *Если $|M_G| < \infty$, то*

$$|M_G| = |\,\mathrm{Orb}\,(m_1)| + \ldots + |\,\mathrm{Orb}\,(m_k)|,$$

где $m_1, \ldots, m_k$ — представители орбит.

Доказательство. вытекает из рассмотрения отношения эквивалентности: $y \sim x \iff \mathrm{Orb}\,(y) = \mathrm{Orb}\,(x)$. □

Замечание 3. Если $M_G = \mathrm{Orb}\,(m)$, $m \in G$ (т. е. имеется единственная орбита), то будем говорить, что группа G действует транзитивно.

Определение 2. Если $p \in M_G$, то стабилизатором элемента p назовем следующее подмножество группы G:

$$\mathrm{St}\,(p) = \{g \in G \mid gp = p\}.$$

Теорема 2. *Пусть $p \in M_G$. Тогда():*

1) *стабилизатор $\mathrm{St}\,(p)$ элемента $p \in G$ является подгруппой группы G;*

2) *соответствие между смежными классами $\mathrm{St}\,(p)a$, $a \in G$, и элементами $pa \in Gp = \mathrm{Orb}\,(p)$ является биекцией;*

3) *если $|G| = n < \infty$, то $|G| = |\,\mathrm{Orb}\,(p)| \cdot |\,\mathrm{St}\,(p)|$ (и следовательно, $|\,\mathrm{Orb}\,(p)|$ и $|\,\mathrm{St}\,(p)|$ — делители числа $n = |G|$, при этом $|\,\mathrm{Orb}\,(p) = \frac{|G|}{|\,\mathrm{St}\,(p)|}$).*

Доказательство.

1) Если $g, h \in \mathrm{St}\,(p)$ т. е. $gp = p$ и $hp = p$, то $hgp = hp = p$, и поэтому $hg \in \mathrm{St}\,(p)$. Если $g \in \mathrm{St}\,(p)$, т. е. $gp = p$, то $g^{-1}p = g^{-1}gp = ep = p$, и поэтому $g^{-1} \in \mathrm{St}\,(p)$. Ясно, что $ep = p$, т. е. $e \in \mathrm{St}\,(p)$, т. е. $\mathrm{St}\,(p) \neq \varnothing$. Таким образом, $\mathrm{St}\,(p)$ — подгруппа группа G.

2) Если $a, b \in G$, то

$$ap = bp \iff b^{-1}ap = p \iff b^{-1}a \in \mathrm{St}\,(p) \iff a\,\mathrm{St}\,(p) = b\,\mathrm{St}\,(p).$$

Таким образом, установлена биекция между различными элементами орбиты $Gp = \mathrm{Orb}\,(p)$ и множеством различных смежных классов $a\,\mathrm{St}\,(p)$ по подгруппе $\mathrm{St}\,(p)$: $ap \leftrightarrow a\,\mathrm{St}\,(p)$.

В силу 2) число различных смежных классов по подгруппе $\mathrm{St}\,(p)$ совпадает с $|\,\mathrm{Orb}\,(p)|$. Применяя теорему Лагранжа, получаем: $|G| = |\,\mathrm{Orb}\,(p)| \cdot |\,\mathrm{St}\,(p)|$. В частности, $|\,\mathrm{Orb}\,(p)| = \frac{|G|}{|\,\mathrm{St}\,(p)|}$. $\square$

Лемма 1. *Если* $p' = ap \in \mathrm{Orb}\,(p)$, $p \in M_G$, *то*:

1) $a\,\mathrm{St}\,(p) = \{g \in G \mid gp = p'\}$;

2) $\mathrm{St}\,(p') = a\,\mathrm{St}\,(p)a^{-1}$ (*т. е.* $\mathrm{St}\,(p')$ — *подгруппа, сопряженная с подгруппой* $\mathrm{St}\,(p)$).

Доказательство.

1) Фактически, это уже было проверено в предыдущей теореме:

$$gp = p' \iff gp = ap \iff a^{-1}gp = p \iff$$
$$\iff a^{-1}g \in \mathrm{St}\,(p) \iff g \in a\,\mathrm{St}\,(p).$$

2) Действительно,

$$g \in \mathrm{St}\,(p') \iff gap = ap \iff a^{-1}gap = p \iff$$
$$\iff a^{-1}ga \in \mathrm{St}\,(p) \iff g \in a\,\mathrm{St}\,(p)a^{-1}. \quad \square$$

ПРИМЕРЫ ПОЛИГОНОВ

Пример 1. $M_G = \{1, 2, \ldots, n\}_{S_n}$, где σi — значение подстановки $\sigma \in S_n$ на элементе i из $\{1, 2, \ldots, n\}$. Так как $i(i, j) = j$ для цикла (i, j), то это действие группы $\mathbf{S}_n$ на $\{1, 2, \ldots, n\}$ транзитивно. Ясно, что, например, $\mathrm{St}\,(n) = \mathbf{S}_{n-1}$. Более общим образом, для любого множества M и группы всех биекций $\mathbf{S}(M)$ имеем полигон $M_{\mathbf{S}(M)}$.

Пример 2. Пусть $\sigma \in \mathbf{S}_n$, (σ) — циклическая подгруппа в $\mathbf{S}_n$, порожденная подстановкой σ. Тогда: $\{1, 2, \ldots, n\}_{(\sigma)}$ — полигон над группой (σ), его различные орбиты — это в точности непересекающиеся циклы подстановки (σ), перестановочные между собой.

Пример 3 (регулярное представление левыми умножениями). Пусть $M_G = G_G$ с умножением $(g, x) \to gx$ для $x \in G$, $g \in G$. Ясно, что: $(hg)x = h(gx)$ (для $x, g, h \in G$, ассоциативность умножения в группе); $ex = x$ для единицы e группы G.

Если $p, x \in G$, то $\mathrm{St}\,(p) = \{g \in G \mid gp = p\} = \{e\}$ и $\mathrm{Orb}\,(x) = Gx = G$ (т. е. это действие транзитивно).

Если $g \in G$, то рассмотрим отображение $\rho_g \colon G \to G$, $\rho_g x = gx$. Так как из $gx = gy$ для $x, y \in G$ следует (умножим на g^{-1} справа в группе G), что $x = y$, то ρ_g — мономорфизм. Так как для любого $z \in G$ имеем $z = gg^{-1}z$, то ρ_g — сюръекция.

Итак, $\rho_g \in \mathbf{S}(G)$.

Так как для $x, g, h \in G$ имеем

$$\rho_{hg}x = (hg)x = h(gx) = \rho_h(\rho_g x),$$

т. е. $\rho_{hg} = \rho_h\rho_g$, то отображение $\rho\colon G \to \mathbf{S}^{\mathrm{r}}(G)$, $\rho(g) = \rho_g$, является гомоморфизмом групп.

Если $g, g' \in G$ и $\rho_g = \rho(g) = \rho(g') = \rho_{g'}$, то $g = eg = eg' = g'$.

Таким образом, ρ — инъективный гомоморфизмом.

Итак, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 3 (Кэли)**.** *Регулярное представление группы G правыми умножениями*

$$G \xrightarrow{\rho} \mathbf{S}^{\mathrm{r}}(G) = \mathbf{S}(G), \quad g \to \rho_g, \quad \rho_g x = gx,$$

является инъективным гомоморфизмом.

Следствие 2. *Всякая группа G изоморфна некоторой подгруппе G' группы подстановок $\mathbf{S}(G)$ на множестве G.*

Следствие 3. *Если $n = |G| < \infty$, то группа G изоморфна некоторой подгруппе G' группы подстановок $\mathbf{S}_n$. С точностью до изоморфизма существует лишь конечное число групп порядка n.*

Замечание 4. К сожалению, $|S_n| = n!$, и подгрупп в $\mathbf{S}_n$ из n элементов достаточно много.

Пример 4. Пусть H — подгруппа группы G, рассмотрим полигон

$$M_H = G_H, \quad (hx) \to hx \text{ для } x \in G,\ h \in H.$$

Если $p, x \in G$, то

$$\mathrm{St}\,(p) = \{h \in H \mid hp = p\} = \{e\}$$

и $\mathrm{Orb}\,(x) = Hx$ — левый смежный класс Hx по подгруппе H, порожденный элементом $x \in G$.

Таким образом, в этом частном случае полигона G_H разбиение на орбиты превращается в хорошо знакомое нам разбиение группы в объединение непересекающихся различных левых смежных классов $G = \dot{\bigcup} Hx$, и как следствие подсчета элементов по орбитам имеем

$$|G| = \sum |\,\mathrm{Orb}\,(x)| = \sum |Hx| = [G : H]|H|$$

(т. е. теорему Лагранжа).

Пример 5 (действие группы G левыми умножениями на множестве правых смежных классов). Пусть H — подгруппа группы G,

$$M_G = \{xH,\ x \in G\}, \quad g(xH)g = gxH \ \text{ для } \ x, g \in G.$$

Это умножение корректно:

если $xH = x'H$, то $x' = xh$, $h \in H$, и поэтому $gx' = gxh$, тогда $gx'H = gxH$.

Если $x, g_1, g_2 \in G$, то $(g_1g_2)(xH) = g_1\big(g_2(xH)\big)$ и $e(xH) = xH$, т. е. $M_G = \{xH \mid x \in G\}_G$ — правый полигон над группой G.

Так как $\mathrm{Orb}\,(xH) = M_G$, то это действие группы G транзитивно.

Пример 6 (действие группы G на группе G сопряжением). Пусть $M_G = G_G$, $(g, m) \to gmg^{-1} = \alpha_g m$ для $m, g \in G$.

Так как для $m, g, h \in G$ имеем

$$m\alpha_{hg} = (hg)m(hg)^{-1} = h(gmg^{-1})h^{-1} = \alpha_h(\alpha_g m),$$

т. е. $\alpha_{hg} = \alpha_h\alpha_g$,

$$\alpha_e m = eme^{-1} = m,$$

то $M_G = G_G$ с сопряжением — левый G-полигон.

КЛАССЫ СОПРЯЖЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Если $x \in G$, то при сопряжении орбита элемента

$$\operatorname{Orb}(x) = \{gxg^{-1} \mid g \in G\}$$

— это класс сопряженных элементов элемента x.

Ясно, что $\operatorname{Orb}(e) = \{e\}$. Более того, $|\operatorname{Orb}(x)| = 1 \iff x \in \mathbf{Z}(G)$, т. е. одноэлементные орбиты — это в точности элементы центра, поскольку $gxg^{-1} = x$ для всех $g \in G$ равносильно тому, что $xg = gx$ для всех $g \in G$, т. е. тому, что $x \in \mathbf{Z}(G)$.

Ясно, что

$$\operatorname{St}(x) = \{g \mid gxg^{-1} = x\} = \mathbf{C}(x),$$

где $\mathbf{C}(x) = \{y \in G \mid xg = gx\}$ — централизатор элемента $x \in G$.

Таким образом, теорема о разбиении на орбиты в данном случае означает следующее.

Теорема 4 (о разбиении на классы сопряженных элементов)**.** *Пусть G — группа, тогда*:

1) *группа является объединением орбит — непересекающихся различных классов сопряженных элементов (т. е. отношение сопряженности $y \sim x$, если $y = gxg^{-1}$, является отношением эквивалентности)*;

2) *число элементов конечной группы G, сопряженных с элементом $x \in G$, равно индексу централизатора $\mathbf{C}(x)$ элемента $x \in G$ в группе (поскольку $|G| = |\operatorname{Orb}(x)| \cdot |\operatorname{St}(x)| = \{$ число сопряженных с x элементов$\} \cdot |\mathbf{C}(x)|$), т. е. числу $|G|/|\mathbf{C}(x)|$, и является делителем числа $|G|$.* □

ЦЕНТР КОНЕЧНОЙ p-ГРУППЫ

Теорема 5. *Фактор неабелевой группы по ее центру не может быть циклической группой.*

Доказательство. Предположим, что это не так, т. е. существует некоторая неабелева группа G такая, что $G/\mathbf{Z}(G) = G/Z$ — циклическая группа. Пусть тогда $G/Z = \langle gZ \rangle$. В этом случае любой элемент группы G представляется в виде произведения $g^k z$, где $z \in Z$.

Рассмотрим два произвольных элемента группы G — $g^k z_1$ и $g^l z_2$. Они коммутируют, так как элементы центра коммутируют со всеми элементами группы, а степени элемента g коммутируют между собой.

Таким образом, группа G — абелева, что противоречит предположению. □

Теорема 6. *Пусть G — конечная p-группа, т. е. $|G| = p^k$, где p — простое число, $k \in \mathbb{N}$. Тогда ее центр нетривиален, т. е. $|\mathbf{Z}(G)| > 1$.*

Доказательство. Рассмотрим разбиение группы G на классы сопряженных элементов. Одноэлементный класс — это в точности элемент центра (один из них $\{e\}$). Содержащий больше одного элемента класс сопряженных элементов содержит p^l элементов, где $l > 1$ (как нетривиальный делитель числа $|G| = p^k$). Отсюда следует, что $|\mathbf{Z}(G)| > 1$ (в противном случае $p^k = 1 + pq$). □

Теорема 7 (о коммутативности группы из p^2 элементов)**.** *Пусть G — конечная группа, $|G| = p^2$, где p — простое число. Тогда G — абелева группа.*

Доказательство. В силу предыдущей теоремы $|\mathbf{Z}(G)| > 1$, т. е. $|\mathbf{Z}(G)| = p$ или $|\mathbf{Z}(G)| = p^2$. Но первый случай ($|\mathbf{Z}(G)| = p$) невозможен, поскольку тогда $|G/\mathbf{Z}(G)| = p^2/p = p$, и поэтому $G/\mathbf{Z}(G)$ — циклическая группа, что невозможно. Итак, $|\mathbf{Z}(G)| = p^2$, т. е. $G = \mathbf{Z}(G)$, и поэтому группа G коммутативна. □

НОРМАЛИЗАТОРЫ ПОДГРУПП

Пример 7. Пусть $L_G = L(G)$ — совокупность всех подгрупп H группы G, $(g, H) \to gHg^{-1}$, $g \to G$ (действие группы G на подгруппах сопряжением).

Определение 3. Стабилизатор подгруппы H при этом действии группы G сопряжениями

$$\mathrm{St}\,(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$$

называется *нормализатором подгруппы* H в группе G (для него используется обозначение $\mathbf{N}_G(H)$).

Лемма 2 (свойства нормализатора $\mathbf{N}_G(H)$)**.**

1) $\mathbf{N}_G(H)$ — *подгруппа группы* G, *содержащая подгруппу* H;

2) $H \lhd \mathbf{N}_G(H)$;

3) *если* $H \lhd K \subseteq G$ (*т. е.* K — *подгруппа группы* G, *содержащая подгруппу* H *и* H — *нормальная подгруппа в* K), *то* $K \subseteq \mathbf{N}_G(H)$, *и, таким образом,* $\mathbf{N}_G(H)$ — *наибольшая подгруппа, содержащая* H *в качестве нормальной подгруппы* (*конечно, если* $H \lhd G$, *то* $\mathbf{N}_G(H) = G$).

Доказательство.

1) Так как $\mathbf{N}_G(H) = \mathrm{St}\,(H)$, то ясно, что $\mathbf{N}_G(H)$ (как любой стабилизатор) — подгруппа группы G.

2) Если $g \to \mathbf{N}_G(H)$, то $gHg^{-1} = H$, т. е. $H \lhd \mathbf{N}_G(H)$ (т. е. H — нормальная подгруппа группы $\mathbf{N}_G(H)$).

3) Если $H \lhd K \subseteq G$, то для любого элемента $g \in K$ имеем $gHg^{-1} = H$ (поскольку H — нормальная подгруппа группы), т. е. $g \in \mathrm{St}\,(H) = \mathbf{N}_G(H)$, и поэтому $K \subseteq \mathbf{N}_G(H)$. □

Упражнение 1. Если B — подгруппа, лежащая в нормализаторе $\mathbf{N}_G(A)$ подгруппы A группы G, то AB — подгруппа группы G и $AB/A \cong B/A \cap B$.

Теорема 8. *Пусть G — p-группа, $|G| = p^r$, $r \geqslant 1$. Тогда группа G содержит нормальную подгруппу порядка p^{r-1}.*

Доказательство. Проведем индукцию по r. Ясно, что утверждение верно при $r = 1$. Пусть оно верно для всех $k < r$, где $r > 1$.

В силу теоремы 6 $Z(G) \neq e$ (здесь $Z(G)$ — центр группы G). Так как p делит число $|Z(G)|$, то абелева группа $Z(G)$ содержит элемент g такой, что $p = O(g) = |\langle g\rangle|$. Ясно, что $N = \langle g\rangle \lhd G$ и $|G/N| = p^r/p = p^{r-1}$. В силу индуктивного предположения для p^{r-2} фактор-группа $\bar{G} = G/N$ содержит нормальную подгруппу $\bar{H} = H/N$, где H — нормальная подгруппа в G, $N \subset H \lhd G$, $|\bar{H}| = p^{r-2}$. Тогда $|H| = |\bar{H}|\,|N| = p^{r-2} \cdot p = p^{r-1}$. Итак, группа G содержит нормальную подгруппу H порядка p^{r-1}. □

ПЕРВАЯ ТЕОРЕМА СИЛОВА

Одним из ярких результатов теории конечных групп в направлении частичного обращения теоремы Лагранжа являются следующие три теоремы Силова (1872).

Теорема 9 (первая теорема Силова о существовании силовских подгрупп)**.** *Пусть G — конечная группа, $|G| = n = p^k m$, $k \geqslant 1$, p — простое число, $(p, m) = 1$. Тогда группа G содержит подгруппу H такую, что $|H| = p^k$ (такая подгруппа называется силовской подгруппой группы G).*

Доказательство.

1) Если G — абелева группа, $|G| = p^k m$, $(p, m) = 1$, то в качестве H можно взять примарную компоненту G_p группы G (т. е. прямую сумму всех p-примарных циклических групп канонического разложения), и тогда $G_p = p^k$.

2) Если $|G| = p^k$ (т. е. $m = 1$), то $G = H$.

3) Проведем доказательство индуктивно.

СЛУЧАЙ 1. p делит число $|\mathbf{Z}(G)|$ элементов центра $\mathbf{Z}(G)$ группы G.

Из обращения теоремы Лагранжа для абелевых групп найдется подгруппа A в центре $\mathbf{Z}(G)$, $|A| = p$.

Ясно, что $A \lhd G$, $|G/A| = n/p = p^{k-1}m < n$.

В силу индуктивного предположения в $\bar{G} = G/A$ найдется подгруппа $\bar{B}$, $|\bar{B}| = p^{k-1}$. Но $\bar{B} = B/A \subset G/A$, где $A \subseteq B \subseteq G$, поэтому

$$|B| = |A|\,|B/A| = pp^{k-1} = p^k,$$

т. е. B — силовская подгруппа группы G.

СЛУЧАЙ 2. p не делит порядок $|\mathbf{Z}(G)|$ центра $\mathbf{Z}(G)$ группы G.

Рассмотрим разложение группы на классы сопряженных элементов

$$G = \dot{\bigcup_{i=1,\dots,l}} C_i.$$

Пусть $C_1, \dots, C_r$ — одноэлементные классы сопряженных элементов (т. е. все элементы центра $\mathbf{Z}(G)$, $r = |\mathbf{Z}(G)|$).

Так как $|G|$ делится на p, а число r не делится на p, найдется орбита

$$C_i = \operatorname{Orb}(x_i), \quad r+1 \leqslant i \leqslant l,$$

такая, что $|G|/|C(x_i)| = |C_i|$ не делится на p.

Тогда $|C(x_i)| < n$, но по индуктивному предположению в $C(x_i)$ найдется подгруппа H такая, что $|H| = p^k$, т. е. H — силовская подгруппа группы G ($H \subseteq C(x_i) \subseteq G$). $\square$

ВТОРАЯ ТЕОРЕМА СИЛОВА

Теорема 10 (вторая теорема Силова о сопряженности силовских подгрупп)**.** *Пусть G — конечная группа,*

$$|G| = p^k m, \quad k \geqslant 1, \ (p, m) = 1.$$

1) *Любая p-подгруппа H группы G (т. е. $|H| = p^l$, $l \leqslant k$) содержится в некоторой силовской p-подгруппе.*

2) *Любые две силовские подгруппы S_1 и S_2 сопряжены (т. е. $S_2 = gS_1g^{-1}$ для некоторого $g \in G$).*

Доказательство. Случай, когда $m = 1$, ясен. Пусть $m > 1$, и пусть S, $|S| = p^k$, — силовская p-подгруппа (существование которой доказано в первой теореме Силова).

Рассмотрим следующее левое действие подгруппой H:

$$M_H = \{xS \mid x \in G\}, \quad (a, xS) \to axS \text{ для } x \in G,\ a \in H$$

(т. е. правые смежные классы xS подгруппы S с умножением слева на элементы из подгруппы H); корректность умножения ясна:

$$xS = x'S \implies x' = xs, \quad ax' = (ax)s \implies ax'S = axS.$$

Из теоремы Лагранжа для подгруппы S:

$$|M| = |G|/|S| = p^k m/p^k = m > 1,$$

при этом $(p, m) = 1$.

Так как

$$p^l = |H| = |\operatorname{St}(y)|\,|\operatorname{Orb}(y)|$$

для элемента $y \in M_H$, то число элементов в каждой неодноэлементной орбите действия M_H делится на p.

Следовательно, существует одноэлементная орбита $xS \in M_H$, $x \in G$, т. е. для xS имеем $HxS = xS$.

Но тогда $Hx \subseteq xS$, и поэтому $H \subseteq xSx^{-1}$. Так как

$$|xSx^{-1}| = |S| = p^k,$$

то xSx^{-1} является силовской p-подгруппой, содержащей исходную p-подгруппу H.

Если же H — силовская p-подгруппа, т. е. $|H| = p^k$, то $H = xSx^{-1}$. Тем самым показано, что любые две силовские подгруппы $S_1 = S$ и $S_2 = H$ сопряжены между собой. □