Лемма 1. *Если $A \triangleleft X$ и $B \triangleleft Y$, то $(X \times Y)/(A \times B) \simeq X/A \times Y/B$.*

Доказательство. Ядром естественного отображения $X \times Y \to X/A \times Y/B$, где $(x, y) \mapsto (xA, yB)$, служит $A \times B$, остаётся воспользоваться теоремой о гомоморфизмах.

Теорема о строении конечно порождённых абелевых групп. *Каждая конечно порождённая абелева группа G изоморфна прямой сумме конечного числа циклических групп, порядок каждой из которых либо бесконечен, либо является степенью простого числа. Такое разложение «единственно с точностью до изоморфизма», то есть из изоморфизма $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} B_i \simeq \bigoplus\limits_{i=1}^{m} C_i$, где каждая группа B_i и C_i является либо бесконечной, либо примарной циклической, причём $|B_1| \leqslant \ldots \leqslant |B_n|$ и $|C_1| \leqslant \ldots \leqslant |C_m|$, следует, что $n = m$ и $B_i \simeq C_i$ для всех i.*

Доказательство. Каждая конечно порождённая абелева группа G изоморфна факторгруппе свободной абелевой группы конечного ранга: $G \simeq \mathbb{Z}^n/H$. По теореме о подгруппах свободных абелевых групп (о согласованных базисах), мы можем считать, что $G \simeq (\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z})/(k_1\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus k_n\mathbb{Z})$. По лемме 1 получаем

$$G \simeq (\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z})/(k_1\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus k_n\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/(k_1\mathbb{Z}) \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/(k_n\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_{k_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{k_n} \quad (\text{где } Z_0 \overset{\text{опр}}{=} \mathbb{Z} \text{ и } Z_1 \overset{\text{опр}}{=} \{0\}).$$

Остаётся воспользоваться тем, что всякая конечная циклическая группа раскладывается в прямую сумму примарных циклических. Это завершает доказательство существования. Докажем теперь единственность.

Пусть $G \simeq \mathbb{Z}^k \oplus K$, где K — конечная абелева группа. Покажем что ни подгруппа K, ни число k не зависят от разложения. Действительно, подгруппа K инвариантно определяется как *периодическая часть* $T(G)$ группы G, то есть множество элементов конечного порядка: $K = T(G) \overset{\text{опр}}{=} \{g \in G \;;\; |\langle g \rangle| < \infty\}$; а число k есть ранг (свободной) факторгруппы $G/T(G)$ (ранг свободной абелевой группы инвариантен по простой причине: $\mathrm{rk} F = \log_2 |F/2F|$).

Остаётся доказать единственность разложения в прямую сумму примарных циклических для к о н е ч н ы х абелевых групп. Заметим, что подгруппа $\mathbb{Z}_p^{k_1} \oplus \mathbb{Z}_{p^2}^{k_2} \oplus \ldots$ группы

$$G = \left(\mathbb{Z}_p^{k_1} \oplus \mathbb{Z}_{p^2}^{k_2} \oplus \ldots\right) \oplus \left(\mathbb{Z}_q^{l_1} \oplus \mathbb{Z}_{q^2}^{l_2} \oplus \ldots\right) \oplus \ldots, \quad \text{где } p, q, \ldots \text{ — различные простые,}$$

определяется инвариантно как *p-компонента* $T_p(G)$ группы G: $T_p(G) \overset{\text{опр}}{=} \{g \in G \;;\; |\langle g \rangle| \text{ есть степень числа } p\}$. Задача доказательства единственности свелась к случаю, когда абелева группа G является конечной p-группой (то есть $|G|$ есть степень фиксированного простого числа p): $G = \mathbb{Z}_p^{k_1} \oplus \mathbb{Z}_{p^2}^{k_2} \oplus \ldots$. Заметим, что следующие суммы

$$\begin{aligned}
I_1 &= k_1 + k_2 + \ldots, \\
I_2 &= k_1 + 2(k_2 + k_3 + \ldots), \\
I_3 &= k_1 + 2k_2 + 3(k_3 + \ldots), \\
I_4 &= k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 4(k_4 + \ldots), \\
&\ldots \\
I_? &= k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 4k_4 + 5k_5 + \ldots
\end{aligned}$$

определяются инвариантно (то есть не зависят от разложения): $I_k = \log_p \left|\left\{x \in G \mid x^{p^k} = 1\right\}\right|$. Осталось заметить, что числа k_i выражаются через I_i:

$$\begin{aligned}
k_1 &= 2I_1 - I_2, \\
k_2 &= 3I_1 - I_3 - 2k_1 = -I_1 + 2I_2 - I_3, \\
k_3 &= 4I_1 - I_4 - 3k_1 - 2k_2 = -I_2 + 2I_3 - I_4, \\
&\ldots \\
k_{100} &= -I_{99} + 2I_{100} - I_{101}, \\
&\ldots
\end{aligned}$$

и потому тоже не зависят от разложения, что и требовалось.

Упражнение. Какой определитель у матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \ldots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \ldots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 10 \end{pmatrix}$, обратную к которой мы фактически посчитали? Как выглядит обратная матрица?