

ПРОГРАММА
внешнего кандидатского экзамена
по специальности
Алгебраическая геометрия

Апрель 2023 г.

I. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

1. Аффинные алгебраические многообразия. Регулярные функции. Морфизмы.
Литература: [21, гл. I, §2]; *доп. лит.:* [20, гл. I, § 1, § 3], [11, гл. I, §1].
2. Теорема Гильберта о нулях. Двойственность между категориями аффинных многообразий и конечно порожденных алгебр.
Литература: [21]; *доп. лит.:* [2], [20, гл. I, § 1, § 3], [11, гл. I, §1].
3. Топология Зарисского. Ее свойства. Размерность многообразия. Разложение многообразия на неприводимые компоненты.
Литература: [21, гл. I, §3.1]; *доп. лит.:* [20, гл. I, § 1], [11, гл. I, §1].
4. Рациональные функции и рациональные отображения.
Литература: [21, §3]; *доп. лит.:* [20, гл. I, § 4].
5. Касательные пространства и отображения. Особые и неособые точки. Дифференцирование и размерность многообразия.
Литература: [21, гл. II, §§1-3]; *доп. лит.:* [20, гл. I, § 5], [11, гл. I, §1].
6. Проективные алгебраические многообразия. Основные понятия (регулярные функции, аффинное покрытие, поле функций и т.д.).
Литература: [21, гл. I]; *доп. лит.:* [11, гл. I, §1], [20, гл. I].
7. Примеры проективных многообразий. Многообразия Веронезе. Многообразия Сегре. Граф-сманьяны. Проективизации векторных расслоений.
Литература: [21, гл. I, §§4-5]; *доп. лит.:* [22, гл. IV, §2], [11, гл. II, §2Б].
8. Квазипроективные алгебраические многообразия. Произведение многообразий.
Литература: [21, гл. I, §5]; *доп. лит.:* [12, гл. I, §§5-6].
9. Замкнутость образа проективного многообразия
Литература: [22, гл. I, §5].
10. Конечные морфизмы. Существование конечного морфизма на проективное пространство.
Литература: [21, гл. I, §5].
11. Нормальные многообразия. Нормализация (конструкция, универсальное свойство).
Литература: [21, гл. II, §5]; *доп. лит.:* [12, гл. III, §8].
12. Теорема о размерности слоев морфизма.
Литература: [21, гл. I, §6]; *доп. лит.:* [12, гл. I, §8].
13. Свойства морфизмов. Гладкость. Ветвление.
Литература: [21, гл. II, §6]; *доп. лит.:* [20, гл. III, §10].
14. Дивизоры (Вейля и Картье). Линейная эквивалентность. Дивизоры и линейные расслоения.
Литература: [21, гл. III, §1]; *доп. лит.:* [20, гл. II, §6], [3, гл. I, §1].

15. Линейные системы дивизоров. Базисное множество. Соответствие между линейными системами и отображениями в проективное пространство. Теорема Бертини.
Литература: [21, гл. II, §6]; *доп. лит.:* [20, гл. II, §6; гл. III, §10], [3, гл. I, §1].
16. Дифференциальные формы. Рациональные дифференциальные формы. Поведение при рациональных отображениях. Канонический класс.
Литература: [21, гл. III, §§5-6]; *доп. лит.:* [11], [20, гл. II, §8].
17. Неособые проективные кривые. Дивизоры на кривых. Степень дивизора на кривой.
Литература: [22, гл. III, §2]; *доп. лит.:* [20, гл. II, §6].
18. Алгебраические группы. Компонента единицы. Факторгруппы. Аффинные алгебраические группы.
Литература: [21, гл. III, §4]; *доп. лит.:* [19].
19. Строение бирациональных преобразований. Исключительные подмногообразия. Основная теорема Зарисского (о связности).
Литература: [21, гл. II, §4]; *доп. лит.:* [20, гл. V, §5], [11, гл. III, §3Б-3В].
20. Раздутие (σ -процесс) в аффинном пространстве. Локальные свойства раздутия. Поведение подмногообразий при раздутии. Универсальное свойство раздутия.
Литература: [21, гл. II, §4]; *доп. лит.:* [22, гл. IV, §2], [20, гл. II, §7].
21. Многочлен Гильберта.
Литература: [22, гл. VI, §4]; *доп. лит.:* [20, гл. I, §7], [11, гл. VI, §6В].

II. СХЕМЫ И КОГОМОЛОГИИ

1. Пучки и связанные с ними объекты. Операции над пучками. Свойства. Точные последовательности пучков. Пучок регулярных функций на многообразии.
Литература: [20, гл. II, §1]; *доп. лит.:* [22, гл. V, §2].
2. Спектр кольца. Схемы. Проективный спектр градуированного кольца.
Литература: [20, гл. II, §2], *доп. лит.:* [22, гл. V, §3].
3. Морфизмы. Изоморфизмы. Морфизм Фробениуса. Расслоенные произведения. Относительность и замена базы.
Литература: [20, гл. II, §§2-3]; *доп. лит.:* [22, гл. V, §§3-4], [5, гл. IV, §3].
4. Когомологии пучков (когомологии Чеха). Свойства точности.
Литература: [20, гл. III, §4]; *доп. лит.:* [6].
5. Когомологии аффинных и проективных схем.
Литература: [20, гл. III, §§3-5]; *доп. лит.:* [6].

III. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ И РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ

1. Теорема Римана-Роха для кривых. Плоские кривые.
Литература: [20, гл. IV, §1]; *доп. лит.:* [3, гл. II, §3], [17, гл. I, §4, 9], [23, гл. II, §2], [14, гл. II, §16], [11, гл. VII, §7Б].
2. Двойственность Серра.
Литература: [20, гл. III, §§3-5, 7]; *доп. лит.:* [17, гл. I, §8], [14, гл. II, §17].
3. Формула Гурвица. Топология римановых поверхностей. Арифметический и топологический род римановой поверхности.
Литература: [20, гл. IV, §2]; *доп. лит.:* [3, гл. II, §1], [23, гл. I, §3], [22, гл. VII, §§3].
4. Эллиптические и гиперэллиптические кривые.
Литература: [20, гл. IV, §4]; *доп. лит.:* [3, гл. II, §3].
5. Канонические кривые.
Литература: [20, гл. IV, §4].

IV. КОМПЛЕКСНЫЕ ПРОЕКТИВНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

1. Основные понятия. Пучки и когомологии.
Литература: [3, гл. 0, §3]; *доп. лит.:* [18, гл. II].
2. Когомологии де Рама и Дольбо.
Литература: [3, гл. 0, §2].
3. Теорема Абеля на кривых (римановых поверхностях).
Литература: [3, гл. II, §2].
4. Кэлеровы многообразия. Теория Ходжа.
Литература: [3, гл. 0, §§6-7]; *доп. лит.:* [9, гл. I], [18, гл. V].
5. Теорема Кодаиры об обращении в нуль.
Литература: [3, гл. I, §2]; *доп. лит.:* [18, гл. VI, §2].
6. Теорема Кодаиры о вложении.
Литература: [3, гл. I, §4]; *доп. лит.:* [18, гл. VI, §4].
7. Теоремы Лефшеца о гиперплоских сечениях и об $(1, 1)$ -классах.
Литература: [3, гл. I, §2].
8. Классы Чженя векторных расслоений.
Литература: [3, гл. III, §3]; *доп. лит.:* [18, гл. III, §3], [20, гл. A, §3].
9. Комплексные торы и абелевы многообразия.
Литература: [3, гл. II, §6]; *доп. лит.:* [10, гл. I], [23, гл. III].
10. Алгебраические кривые и их якобианы.
Литература: [3, гл. II, §7].
11. Мероморфные функции на комплексных многообразиях. Мойшезоновы многообразия (примеры).
Литература: [22, гл. VIII, §§2-3]; *доп. лит.:* [20, гл. B, §§3-4].

V. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ И КОМПАКТНЫЕ КОМПЛЕКСНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

1. Теория пересечений на поверхностях. Теорема Римана-Роха. Формула Нётера.
Литература: [4, гл. IV, §1]; *доп. лит.:* [20, гл. V, §1], [7, §§4-5].
2. Бирациональные отображения поверхностей. Разложение в композицию раздутий. Минимальные модели.
Литература: [4, гл. IV, §2]; *доп. лит.:* [20, гл. V, §§3-5], [7, §§6-7].
3. Рациональные поверхности и линейчатые поверхности.
Литература: [4, гл. IV, §§3-5]; *доп. лит.:* [20, гл. V, §2].
4. Общие понятия о классификации алгебраических поверхностей.
Литература: [4, гл. IV, §5]; *доп. лит.:* [20, гл. V, §6], [7, §8].
5. Поверхности типа К3. Поверхности Энриквеса (определения и простейшие свойства).
Литература: [4, гл. IV, §5]; *доп. лит.:* [7, §§11-12].
6. Эллиптические поверхности.
Литература: [4, гл. IV, §5]; *доп. лит.:* [7, §10].
7. Непроективные компактные комплексные поверхности. Примеры.
Литература: [7, §14], [22, гл. VIII, §3].

VI. МНОГОМЕРНАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1. Теория пересечений на многообразиях [20, гл. A, §§2-3], [21, гл. IV, §§1-2].
2. Особенности алгебраических многообразий. Особенности поверхностей [15], [8].
3. Понятие о разрешении особенностей [15].

4. Понятие о программе Мори [8].
5. Многообразия Фано. Основные свойства. Примеры. Поверхности дель Пеццо. Кубическая поверхность [13], [1], [16].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Iskovskikh V. A., Prokhorov Yu. Fano varieties. Algebraic geometry V. — Berlin : Springer, 1999. — Vol. 47 of Encyclopaedia Math. Sci.
- [2] Атья М., Макдональд И. Введение в коммутативную алгебру. — Москва : Факториал Пресс, 2003. — Т. 4 из XX век — Мат. и мех.
- [3] Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. — М. : Мир, 1982. — Т. 1.
- [4] Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. — М. : Мир, 1982. — Т. 2.
- [5] Данилов В. И. Алгебраические многообразия и схемы // Алгебраическая геометрия-1. — ВИНТИ, 1988. — Т. 23 из Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления. — С. 172–302. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/intf97>.
- [6] Данилов В. И. Когомологии алгебраических многообразий // Алгебраическая геометрия-2. — ВИНТИ, 1989. — Т. 35 из Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления., — С. 5–130. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/intf124>.
- [7] Исковских В. А., Шафаревич И. Р. Алгебраические поверхности // Алгебраическая геометрия-2. — 1989. — Т. 35 из Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления. — С. 131–263. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/intf125>.
- [8] Клеменс Х., Коллар Я., Мори С. Многомерная комплексная геометрия. — Москва : Мир, 1993.
- [9] Куликов Вик. С., Курчанов П. Ф. Комплексные алгебраические многообразия: периоды интегралов, структуры Ходжа // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления. — ВИНТИ, 1989. — Т. 36. — С. 5–231. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/rus/intf127>.
- [10] Мамфорд Д. Абелевы многообразия. Библиотека сборника Математика. — М. : Мир, 1971.
- [11] Мамфорд Д. Алгебраическая геометрия. Комплексные проективные многообразия. — Москва : Мир, 1979. — Т. 1.
- [12] Мамфорд Д. Красная книга о многообразиях и схемах. — Москва : МЦМНО, 2007. — С. 296.
- [13] Манин Ю. И. Кубические формы: Алгебра, геометрия, арифметика. — Москва : Наука, 1972.
- [14] О. Форстер. Римановы поверхности. — М. : Мир, 1980.
- [15] Прохоров Ю. Г. Особенности алгебраических многообразий. — Москва : МЦМНО, 2009. — С. 128.
- [16] Прохоров Ю. Г. Трехмерные многообразия Фано. — М. : МИАН, 2022. — Т. 31 из Лекц. курсы НОЦ. — С. 3–154. — ISBN: 978-5-98419-085-5. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/lkn31>.
- [17] Серр Ж.-П. Алгебраические группы и поля классов. — Москва : Мир, 1968.
- [18] Уэлс Р. Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях. — М., Мир, 1976.
- [19] Хамфри Дж. Линейные алгебраические группы. — Наука, 1980.
- [20] Хартсхорн Р. Алгебраическая геометрия. — Москва : Мир, 1981.
- [21] Шафаревич И. Р. Основы алгебраической геометрии. Алгебраические многообразия в проективном пространстве. — II изд. — Москва : Наука, 1988. — Т. I.
- [22] Шафаревич И. Р. Основы алгебраической геометрии. Схемы, комплексные многообразия. — II изд. — Москва : Наука, 1988. — Т. II.
- [23] Шокуров В. В. Римановы поверхности и алгебраические кривые // Алгебраическая геометрия-1. — ВИНТИ, 1988. — Т. 23 из Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления. — С. 5–171. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/rus/intf96>.