

1. Основные разделы и вопросы к экзамену (в билетах):

4. Алгебра

1. Свободные группы. Теорема Нильсена–Шрайера. Копредставления групп (задание образующими и определяющими соотношениями), примеры.
2. Расширения полей. Базис трансцендентности.
3. Конечные расширения. Алгебраическое замыкание подполя. Алгебраические числа.
4. Сепарабельные расширения. Теорема о примитивном элементе.
5. Поле разложения многочлена. Расширения Галуа. Основная теорема теории Галуа.
6. Разрешимость алгебраических уравнений в радикалах. Группа Галуа кубического многочлена и формула Кардано.
7. Конечные поля.
8. Кольца главных идеалов, их факториальность. Теорема о строении конечно порождённых модулей над кольцами главных идеалов, её применение к абелевым группам и линейным операторам.
9. Нётеровы кольца и модули. Нётеровость кольца многочленов (теорема Гильберта о базисе идеала).
10. Конечные расширения нётеровых колец. Целое замыкание подкольца. Целозамкнутые кольца. Целые алгебраические числа.
11. Конечно порождённые коммутативные алгебры и аффинные алгебраические многообразия. Теорема Гильберта о нулях.
12. Топология Зарисского и неприводимые компоненты алгебраического многообразия. Поле рациональных функций и размерность неприводимого алгебраического многообразия.
13. Мономиальные упорядочения. Базис Грёбнера полиномиального идеала. S-полиномы и алгоритм Бухбергера. Критерии совместности и конечности числа решений системы алгебраических уравнений над алгебраически замкнутым полем.
14. Линейные представления групп и ассоциативных алгебр. Неприводимые и вполне приводимые представления. Полная приводимость линейных представлений компактных (в частности, конечных) групп.
15. Морфизмы представлений. Лемма Шура. Изотипные компоненты вполне приводимого представления. Неприводимые представления прямого произведения групп.
16. Теорема Бернсайда.
17. Радикал ассоциативного кольца. Нильпотентность радикала артинова кольца. Радикал коммутативного кольца.
18. Теорема плотности для полупростых модулей. Строение полупростых артиновых колец и полупростых ассоциативных алгебр.

19. Конечномерные ассоциативные алгебры с делением. Обобщённые алгебры кватернионов. Теоремы Фробениуса и Веддербёрна.
20. Групповая алгебра конечной группы, её полупростота (в нулевой характеристике). Центр групповой алгебры и характеры неприводимых представлений конечной группы. Соотношения ортогональности.
21. Группы Ли и их касательные алгебры Ли. Классические линейные группы Ли. Присоединённое представление группы Ли. Экспоненциальное отображение.
22. Полная приводимость линейных представлений групп Ли $GL_n(\mathbb{C})$ и $SL_n(\mathbb{C})$ (унитарный трюк). Неприводимые линейные представления группы Ли $SL_2(\mathbb{C})$ и алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.
23. Простые и разрешимые алгебры Ли, примеры. Теорема Ли о разрешимых алгебрах.
24. Универсальная обёртывающая алгебра. Теорема Пуанкаре–Биркгофа–Витта.

II. Рекомендуемая основная литература:

К разделу 4

- 1) М. Атья, И. Макдональд. Введение в коммутативную алгебру. Москва, Факториал Пресс, 2003.
- 2) Ю. А. Бахтурин. Основные структуры современной алгебры. Москва, Наука, 1990.
- 3) Н. Бурбаки. Коммутативная алгебра. Москва, Мир, 1971.
- 4) Э. Б. Винберг. Курс алгебры. Москва, МЦНМО, 2013.
- 5) А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Часть III: Основные структуры алгебры. Москва, МЦНМО, 2009.
- 6) М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков. Основы теории групп. Москва, Наука, 1982.
- 7) Д. Кокс, Дж. Литтл, Д. О'Ши. Идеалы, многообразия и алгоритмы. Москва, Мир, 2000.
- 8) К. Кэртис, И. Райнер. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. Москва, Наука, 1969.
- 9) И. Ламбек. Кольца и модули. Москва, Факториал, 2005.
- 10) С. Ленг. Алгебра. Москва, Мир, 1968.
- 11) Р. Пирс. Ассоциативные алгебры. Москва, Мир, 1986.
- 12) В. В. Прасолов. Многочлены. Москва, МЦНМО, 2003.
- 13) Ж.-П. Серр. Линейные представления конечных групп. Москва, Мир, 1970.
- 14) Дж. Хамфрис. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений. Москва, МЦНМО, 2003.
- 15) И. Херстейн. Некоммутативные кольца. Москва, Мир, 1972.

- 16) И. Р. Шафаревич. Основы алгебраической геометрии. Том 1. Москва, Наука, 1988.