Программа

второй части кандидатского экзамена по специальности 1.1.5

Алгебраические группы и теория инвариантов

Часть I. Основы алгебраической геометрии.

1. Аффинные алгебраические многообразия, определяющие идеалы, регулярные функции, морфизмы. [10, гл.I, §2], [2, гл.II, 1.1, 1.2], [4, гл.I, 1.1–1.4, 2.1–2.2], [6, прил.I, 1.1, 1.2, 1.4, 1.6, 2.1], [9, 1.1, 1.5].
2. Теорема Гильберта о нулях. Двойственность между категориями аффинных многообразий и конечнопорожденных алгебр без нильпотентов. [10, прил.6], [2, гл.II, 1.7], [4, гл.I, 1.5], [6, прил.I, 1.5], [9, 1.1].
3. Топология Зарисского, ее нетеровость, разложение многообразия на неприводимые компоненты. [2, гл.II, 1.3], [10, гл.I, 3.1], [4, гл.I, 2.7–2.8, гл.II, 1.1, 1.2], [6, прил.I, 1.3, 1.7–1.9], [9, 1.2, 1.3].
4. Теорема об образе доминантного морфизма. [2, гл.II, 1.6], [9, 4.3].
5. Рациональные функции и отображения. [10, §3], [2, гл.II, 1.8–1.9], [4, гл.I, 1.3–1.4].
6. Произведение многообразий. [2, гл.II, 1.4], [10, гл.I, 5.1], [4, гл.I, 2.4], [6, прил.I, 2.7], [9, 1.4].
7. Размерность. Теорема Крулля, теорема о размерности слоев морфизма. [2, гл.II, 3.1], [10, гл.I, §6], [4, гл.II, §4], [6, прил.I, §3], [9, §§3,4].
8. Касательные пространства и отображения. Гладкие и особые точки. [10, гл.II, §§1–3], [2, гл.II, §3], [4, гл.I, §7, гл.II, §6], [6, прил.I, §5], [9, §5].
9. Конечные морфизмы. Нормальные многообразия. [10, гл.I, 5.3–5.4, гл.II, §5], [4, гл.II, §2], [6, прил.I, §4], [9, 4.2].
10. Общее понятие алгебраического многообразия. Проективные многообразия, их полнота. [4, гл.I, §§3–4, гл.II, 3.1–3.3], [10, гл.I, §§4–5], [2, гл.II, §2], [9, §§2,6].

Часть II. Алгебраические группы.

1. Понятие алгебраической группы. Связная компонента единицы. Гомоморфизмы алгебраических групп (ядро и образ — замкнутые подгруппы). [2, гл.III, 1.1–1.4], [9, §7], [6, гл.II, 1.1–1.3].
2. Касательная алгебра Ли. [6, гл.II, 1.4–1.5], [9, гл.III, §13], [2, гл.III, §3].
3. Действия алгебраических групп, локальная замкнутость орбит, представление в алгебре регулярных функций. [2, гл.III, 1.5], [9, 8.1–8.5], [6, гл.II, 2.1–2.4].
4. Линеаризуемость аффинных алгебраических групп и их действий на аффинных многообразиях. [2, гл.III, 1.6], [6, гл.II, 2.4], [9, 8.6].
5. Однородные пространства, теорема Шевалле. Факторгруппы. [2, гл.III, 1.7], [9, гл.IV].
6. Разложение Жордана. Алгебраические торы. Унипотентные группы, теорема Энгеля. [2, гл.III, 2.1–2.4, 3.5–3.7], [9, §§15–17], [6, гл.III, 1.1, 1.3].
7. Коммутант алгебраической группы. Разрешимые группы, теорема Бореля о неподвижной точке, теорема Ли–Колчина. [2, гл.III, 1.4, 2.5–2.9, 3.9], [9, §§17–21], [6, гл.III, 1.2].
8. Редуктивные группы, полная приводимость представлений. [2, гл.IV, §1], [9, §§15–17], [6, гл.II, 3.1, 3.5, гл.III, 1.2].

Часть III. Теория инвариантов.

1. Теорема Гильберта об инвариантах. Категорный фактор аффинного многообразия по действию редуктивной группы, свойства морфизма факторизации. [6, гл.II, §3], [3, 3.4, 4.3–4.4], [8, 2.4].
2. Инварианты конечных групп, теорема Шевалле. [8, 4.2], [6, гл.II, 3.6].
3. Рациональные инварианты, теорема Розенлихта о разделении орбит инвариантами. [3, §2], [6, гл.II, 4.3.E].
4. Замкнутые орбиты. Критерий Мацусимы. Стабильность действия, критерий Попова. Достаточное условие конечности стабилизатора общего положения в терминах индексов. [12, I.2], [7], [3, 7.5], [1].
5. Нильпотентные орбиты, критерий Гильберта–Мамфорда. [6, гл.III, §2], [3, 5.1, 5.3, 5.4].
6. Присоединенное представление редуктивной группы, его орбиты и инварианты. [11].
7. Классическая теория инвариантов систем тензоров. [3, §9], [5], [6, гл.II, 4.1].
8. Полустабильные и стабильные точки проективного действия. Фактор Мамфорда. [3, 4.6], [5].

Литература

[1] Андреев Е.М., Винберг Э.Б., Элашвили А.Г. Орбиты наибольшей размерности полупростых линейных групп Ли. Функц. анализ и прил., 1967, т.1, №4, стр. 3-7.

[2] Винберг Э.Б., Онищик А.Л. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. М., Наука, 1988.

[3] Винберг Э.Б., Попов В.Л. Теория инвариантов. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. т.55. М., ВИНИТИ, 1989.

[4] Данилов В.Л. Алгебраические многообразия и схемы. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. т.23. М., ВИНИТИ, 1988.

[5] Дьедонне Ж., Кэролл Дж., Мамфорд Д. Геометрическая теория инвариантов. М., Мир, 1974.

[6] Крафт Х. Геометрические методы в теории инвариантов. М., Мир, 1987.

[7] Попов В.Л. Критерий стабильности действия полупростой группы на факториальном многообразии. Изв. АН, сер. мат., 1970, т.34, №3, стр. 523–531.

[8] Спрингер Т.А. Теория инвариантов. М., Мир, 1981.

[9] Хамфри Дж. Линейные алгебраические группы. М., Наука, 1980.

[10] Шафаревич И.Р. Основы алгебраической геометрии. т.1. М., Наука, 1988.

[11] Kostant B. Lie group representations on polynomial rings. Amer. J. Math., 1963, vol. 85, pp. 327–404.

[12] Luna D. Slices йtales. Bull. Soc. Math. France, 1973, vol. 33, pp. 81–105.

Авторы: д.ф.-м.н. профессор Э.Б.Винберг, к.ф.-м.н. доцент Д.А.Тимашев