

ВОПРОСЫ К КОЛЛОКВИУМУ
(лектор М.В.Зайцев, 2022)

1. Векторные пространства. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис, размерность.
2. Матрица перехода от одного базиса к другому. Координаты, их изменение при замене базиса. Изоморфизм пространств одинаковой размерности.
3. Подпространства, их суммы и пересечения. Прямая сумма подпространств. Размерность суммы и пересечения подпространств.
4. Сопряженное пространство и его размерность. Канонический изоморфизм. Критерий линейной независимости векторов.
5. Линейные отображения, их задание матрицами. Размерность ядра и образа. Критерий инъективности.
6. Алгебра линейных операторов. Матрица линейного оператора и ее изменение при замене базиса.
7. Определитель и след линейного оператора. Критерий невырожденности оператора.
8. Инвариантные подпространства. Собственные векторы и собственные значения.
9. Характеристический многочлен. Алгебраическая и геометрическая кратности корня.
10. Спектр оператора. Критерии диагонализируемости линейного оператора.
11. Минимальный многочлен, его существование и единственность.
12. Теорема Гамильтона-Кэли и ее следствия.
13. Разложение пространства в сумму корневых подпространств.
14. Нормальный базис для нильпотентного оператора.
15. Жордановы матрицы. Существование жордановой нормальной формы у комплексной матрицы.
16. Единственность жордановой нормальной формы.
17. Билинейные формы и их матрицы. Изменение матрицы при замене базиса. Канонический базис для симметрической билинейной формы.
18. Квадратичные формы и их матрицы. Канонический и нормальный вид квадратичной формы. Алгоритм Лагранжа.
19. Закон инерции для вещественных квадратичных форм.
20. Теорема Якоби. Критерий Сильвестра.
21. Канонический вид кососимметрической билинейной формы.

22. Евклидово пространство. Неравенство Коши-Буняковского и его следствия.
23. Ортогональность векторов. Существование ортонормированного базиса в евклидовом пространстве. Изоморфизм евклидовых пространств одинаковой размерности.
24. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Ортогональное дополнение.
25. Сопряженный оператор и его матрица. Существование ортонормированного базиса из собственных векторов для самосопряженного оператора.
26. Ортогональные матрицы. Приведение квадратичной формы к главным осям.
27. Ортогональный оператор и его канонический базис.
28. Полярное разложение линейного оператора..