

Вопросы к коллоквиуму по алгебре  
осень 2018, группы 107–112, лектор И.В.Аржанцев

1. Системы линейных уравнений (СЛУ), матрица коэффициентов и расширенная матрица системы, совместные и определенные системы, однородные системы, эквивалентные системы, три типа элементарных преобразований, лидер строки, ступенчатые и верхнетреугольные матрицы.
2. Алгоритм приведения матрицы к ступенчатому виду. Улучшенный ступенчатый вид. Обратимость элементарных преобразований. Экзотические уравнения и критерий совместности. Строго ступенчатые матрицы и критерий определенности. Системы, где число уравнений меньше числа неизвестных.
3. Арифметическое векторное пространство. Линейная комбинация. Линейная зависимость и независимость. Подпространство. Линейная оболочка. Порождающее множество для подпространства.
4. Основная лемма о линейной зависимости.
5. Базис подпространства арифметического векторного пространства. Стандартный базис в  $\mathbb{R}^n$ . Дополнение линейно независимого набора до базиса. Размерность: корректность определения и свойства.
6. Множество решений системы – подпространство тогда и только тогда, когда система однородна. Фундаментальная система решений (ФСР). Размерность пространства решений равна числу свободных неизвестных. Алгоритм нахождения ФСР.
7. Множество решений СЛУ является линейным подмногообразием.
8. Ранг и база конечной системы векторов. Эквивалентные наборы векторов, неизменность ранга при элементарных преобразованиях.
9. Строчный и столбцовый ранги матрицы. Элементарные преобразования строк не изменяют линейных соотношений между столбцами. Совпадение строчного и столбцового рангов. Алгоритм нахождения базы.
10. Размерность пространства решений однородной системы равна  $n - \text{rk } A$ .
11. Любое линейное подмногообразие есть множество решений некоторой СЛУ.
12. Теорема Кронекера-Капелли и критерий определенности в терминах рангов.
13. Сложение матриц и умножение матрицы на скаляр. Умножение матриц. Ассоциативность, дистрибутивность, отсутствие коммутативности. Умножение на диагональную матрицу. Скалярные матрицы.
14. Транспонирование и его свойства. След матрицы. Матричные единицы и символы Кронекера. Единичная матрица.
15. Элементарные матрицы. Обратная матрица. Алгоритм нахождения обратной матрицы с помощью элементарных преобразований. Матрица обратима тогда и только тогда, когда она невырождена.
16. Ранг произведения матриц.
17. Подстановки, их количество. Умножение подстановок. Ассоциативность. Единичная и обратная подстановки. Разложение подстановки в произведение независимых циклов.
18. Транспозиции. Разложение подстановки в произведение транспозиций. Инверсия. Четность подстановки. Изменение четности при умножении на транспозицию. Число четных подстановок равно числу нечетных. Знак подстановки. Знак произведения. Четность обратной подстановки.
19. Определитель матрицы. Определитель верхнетреугольной матрицы. Свойства определителя: полилинейность, кососимметричность, поведение при транспонировании и при элементарных преобразованиях.
20. Матрицы с ненулевым определителем. Определитель как полилинейная кососимметрическая нормированная функция.
21. Определитель с углом нулей.
22. Определитель Вандермонда.
23. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по строке и по столбцу. Фальшивое разложение. Присоединенная матрица. Формула для обратной матрицы.
24. Определитель произведения матриц.
25. Теорема Крамера и формулы Крамера.
26. Теорема о ранге матрицы.