

Вопросы к коллоквиуму по алгебре
осень 2015, группы 207–212, лектор И.В.Аржанцев

1. Группа, подгруппа, гомоморфизм, изоморфизм и автоморфизм. Примеры групп: числовые (аддитивные и мультипликативные), вычеты, группы подстановок, группы матриц, группы симметрий, группа диэдра D_n , группа кватернионов Q_8 .
2. Циклические подгруппы, порядок элемента, циклические группы и их подгруппы.
3. Смежные классы, индекс подгруппы, теорема Лагранжа и пять следствий из нее.
4. Нормальные подгруппы, факторгруппы, теорема о гомоморфизме, примеры.
5. Группа автоморфизмов $\text{Aut}(G)$, группы автоморфизмов циклических групп, группа внутренних автоморфизмов $\text{Int}(G)$, центр группы.
6. Классы сопряженности, централизатор элемента, формула для числа элементов в классе сопряженности, классы сопряженности в группах S_n , D_n и $\text{GL}_n(\mathbb{C})$.
7. Внешние и внутренние прямые произведения групп, факторизация по сомножителям, разложение конечной циклической группы.
8. Абелевы группы: периодическая часть, группы без кручения, конечно порожденные и свободные группы. Базис и ранг свободной абелевой группы, матрица перехода.
9. Подгруппа свободной абелевой группы ранга n свободна и ее ранг не превосходит n , приведение целочисленной матрицы к диагональному виду, теорема о согласованных базисах.
10. Факторгруппы свободных абелевых групп, универсальное свойство свободной абелевой группы, разложение конечно порожденной абелевой группы в прямую сумму циклических, единственность разложения конечной абелевой группы в прямую сумму примарных циклических.
11. Экспонента конечной группы. Конечная подгруппа мультипликативной группы поля циклическая. Единственность разложения конечно порожденной абелевой группы.
12. Порождающие элементы. Группа A_n порождена тройными циклами и произведениями пар независимых транспозиций ($n \geq 5$), порождающие группы D_n , группа $\text{GL}_n(F)$ порождена элементарными матрицами, а группа $\text{SL}_n(F)$ – элементарными матрицами первого типа.
13. Коммутатор элементов, коммутант и его свойства. Характеристические подгруппы.
14. Коммутанты групп S_n , A_n , D_n , $\text{SL}_n(F)$ и $\text{GL}_n(F)$. Кратные коммутанты, их характеристичность и нормальность.
15. Разрешимые группы, основные примеры и свойства, производный ряд, разрешимость группы верхнетреугольных матриц.
16. Простые группы, существование композиционного ряда, абелевы простые группы.
17. Простота группы A_n ($n \geq 5$).
18. Действие группы на множестве, орбиты и стабилизаторы, транзитивные, свободные и неэффективные действия, ядро неэффективности действия, примеры действий, три действия группы на себе, теорема Кэли.
19. Сопряженность стабилизаторов точек одной орбиты, изоморфизм действий, транзитивное действие изоморфно действию на G/H , длина орбиты конечной группы, формула Бернсайда.
20. p -группы, нетривиальность центра и разрешимость.
21. Факторгруппа $G/Z(G)$ не может быть циклической, коммутативность групп порядка p^2 .
22. Силовские подгруппы. Первая теорема Силова.
23. Вторая теорема Силова.
24. Третья теорема Силова.
25. Группа порядка pq разрешима ступени не выше двух.