

Экзаменационные вопросы по курсу высшей алгебры за 3-й семестр.

2014 г. Лектор - Э.Б.Винберг

1. Нормальные подгруппы и факторгруппа по нормальной подгруппе.
2. Ядро и образ гомоморфизма групп. Теорема о гомоморфизме.
3. Разложение группы в прямое произведение подгрупп. Случай двух множителей. Внешнее прямое произведение групп, его связь с внутренним.
4. Китайская теорема об остатках (аддитивная версия).
5. Свободные (конечнопорожденные) абелевы группы. Равномощность всех базисов свободной абелевой группы.
6. Описание всех базисов свободной абелевой группы.
7. Свободность и ранг подгруппы свободной абелевой группы.
8. Существование базиса свободной абелевой группы, согласованного с подгруппой.
9. Разложение конечнопорожденной абелевой группы в прямую сумму примарных и бесконечных циклических подгрупп.
10. Единственность числа бесконечных слагаемых и суммы  $p$ -примарных слагаемых (для каждого данного  $p$ ) в разложении конечнопорожденной абелевой группы в прямую сумму примарных и бесконечных циклических подгрупп.
11. Единственность набора порядков слагаемых в разложении абелевой  $p$ -группы в прямую сумму циклических подгрупп.
12. Циклическость мультипликативной группы конечного поля.
13. Автоморфизмы и внутренние автоморфизмы групп. Группа автоморфизмов конечной циклической группы.
14. Системы порождающих в группе. Доказательство того, что группа  $S_n$  порождается транспозициями, а группа  $A_n$  – тройными циклами или (при  $n > 4$ ) произведениями пар независимых транспозиций.
15. Доказательство того, что группа  $GL_n(K)$  порождается элементарными матрицами, а группа  $SL_n(K)$  (при  $|K| > 3$ ) – элементарными матрицами 1-го типа.
16. Определение коммутанта группы и его характеристика как наименьшей нормальной подгруппы, факторгруппа по которой абелева.
17. Вычисление коммутантов групп  $S_n$  и  $A_n$ .
18. Вычисление коммутантов групп  $GL_n(K)$  и  $SL_n(K)$ .
19. Кратные коммутанты группы. Разрешимые группы. При каких  $n$  группа  $S_n$  разрешима?
20. Критерий разрешимости группы. Разрешимость группы треугольных матриц.
21. Простые группы. Простота группы  $A_5$ .

22. Простота группы  $PSL_2()$ .
23. Действия групп. Ядро неэффективности. Орбиты и стабилизаторы. Связь между стабилизаторами эквивалентных точек.
24. Биекция между орбитой действия группы и множеством смежных классов по стабилизатору. Формула для длины орбиты конечной группы.
25. Действие группы на себе левыми (правыми) сдвигами и индуцированное им действие на множестве левых (правых) смежных классов по подгруппе. Классификация транзитивных действий.
26. Действие группы на себе сопряжениями. Централизатор элемента. Формула для числа элементов класса сопряженности в конечной группе.
27. Описание классов сопряженности в группах  $S_n$  и  $GL_n()$ .
28. Действие группы на множестве своих подгрупп сопряжениями. Нормализатор подгруппы. Формула для числа подгрупп конечной группы, сопряженных данной подгруппе.
29. Силовские подгруппы конечной группы. Силовские подгруппы конечной абелевой группы.
30. Первая теорема Силова.
31. Вторая теорема Силова.
32. Третья теорема Силова.
33. Разложение группы в полупрямое произведение (двух) подгрупп. Группа диэдра  $D_n$  как полупрямое произведение циклической группы поворотов и группы порядка 2, порожденной отражением.
34. Группы порядка  $pq$ .
35. Нетривиальность центра конечной  $p$ -группы. Группы порядка  $p^2$ .
36. Линейные и матричные представления групп, связь между ними. Изоморфизм (эквивалентность) представлений. Сумма представлений.
37. Инвариантные подпространства для линейного представления группы. Неприводимые и вполне приводимые представления. Вполне приводимые представления как суммы неприводимых.
38. Полная приводимость линейных представлений конечной группы над полем нулевой характеристики.
39. Мономиальное линейное представление группы  $S_n$ , его разложение в сумму неприводимых представлений.

40. Одномерные линейные представления групп. Одномерные комплексные линейные представления конечной абелевой группы.
41. Морфизмы линейных представлений группы. Лемма Шура. Неприводимые комплексные линейные представления абелевой группы.
42. Кратность вхождения неприводимого представления в данное комплексное линейное представление конечной группы как размерность пространства морфизмов.
43. Кратности вхождения неприводимых комплексных линейных представлений конечной группы в ее регулярное представление. Сумма квадратов неприводимых комплексных представлений конечной группы.
44. Неприводимые комплексные линейные представления групп  $S_3$  и  $S_4$ .
45. Матричные элементы линейных представлений групп. Теорема о том, что матричные элементы неприводимых комплексных линейных представлений конечной группы образуют базис в пространстве функций на группе.
46. Характеры линейных представлений групп. Теорема о том, что характеры неприводимых комплексных линейных представлений конечной группы образуют базис в пространстве центральных функций на группе. Число неприводимых представлений конечной группы.
47. Идеалы и факторкольца. Теорема о гомоморфизме колец.
48. Идеалы и факторкольца евклидова кольца.
49. Прямая сумма колец. Прямая сумма факторколец евклидова кольца по взаимно простым идеалам.
50. Мультипликативная группа кольца вычетов. Функция Эйлера, ее вычисление.
51. Конечные расширения полей. Алгебраические элементы в расширении поля. Подполе, порожденное алгебраическим элементом.
52. Теорема о башне конечных расширений. Подполе в расширении поля  $K$ , порожденное над  $K$  конечным числом алгебраических элементов.

53. Алгебраическое замыкание поля в заданном расширении. Поле алгебраических чисел.
54. Поле разложения многочлена, его единственность.
55. Дискриминант и поле разложения кубического многочлена.
56. Простое подполе и эндоморфизм Фробениуса поля характеристики  $p$ .
57. Конечные поля. Существование и единственность поля из  $P^n$  элементов.
58. Вложения конечных полей.
59. Поле разложения неприводимого многочлена на поле  $p$  и его группа автоморфизмов.
60. Поле отношений целостного кольца.