Образцы задач к билетам по линейной алгебре (ФББ, 2021/22)

1. Даны вершины треугольника A(–5,3), B(7,8), C(–2,–1). Составить уравнения медианы, биссектрисы и высоты треугольника, проведенных из вершины A. (Система координат ортонормированная).

2. Даны точки $E(2,1,0), F(0,2,1), G(1,2,0), H(1,0,-2)$. Найти: (а) объем пирамиды EFGH; (б) длину высоты, проведенной из вершины H, в) расстояние между прямыми (EF) и (GH).

3. Точки A(1,-2,3), B(3,2,1), C(6,4,4) – вершины параллелограмма. Определите координаты его четвертой вершины (найдите все решения).(D_1(4,0,6), D_2(8,8,2), D_3(–2,–4,0)).

4. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку M(1,0,3) и перпендикулярной к плоскостям $x+y+z-8=0,\ 2x-y+4z+5=0$.

5. Докажите, что прямые $\frac{x+1}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-5}{4}, \frac{x+5}{2}=\frac{y+8}{3}=\frac{z-4}{-1}$ пересекаются, и составьте уравнение содержащей их плоскости.

6. Точка A лежит на прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{1}$ и удалена от плоскости $x+y+z+3=0$ на расстояние $\sqrt{3}$. Найдите координаты точки A.

7. а) Найдите угол между плоскостью $4x+4y-7z+1=0$ и прямой $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-6}$; б) составьте уравнение плоскости, содержащей данную прямую и перпендикулярной данной плоскости; в) составьте уравнения ортогональной проекции данной прямой на данную плоскость.

8. Составьте параметрические и канонические уравнения прямой, по которой пересекаются плоскости $x-y+2z-1=0,\ 3x-y+2z+2=0$.

9. Даны прямые $a:\begin{cases} x=5+t \\ y=3-t \\ z=13+t \end{cases}$ и $b:\begin{cases} x=6+t \\ y=1+2t \\ z=10-t \end{cases}$. а) найдите угол между a и b; б) вычислите расстояние между a и b.

10. Найдите матрицу X, удовлетворяющую уравнению $AXB^{-1}=C$,
где $A=\begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{Vmatrix}, B=\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{Vmatrix}, C=\begin{Vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \end{Vmatrix}$.

11. Найдите ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & \lambda & 4 & -2 \\ 1+\lambda & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ в зависимости от параметра λ.

12. Найдите собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, заданного матрицей а) $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, б) $A=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 12 & -8\end{pmatrix}$,в) $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ (при всевозможных значениях параметра). Если возможно, приведите ее к диагональному виду (нужно указать диагональный вид и базис, в котором матрица имеет такой вид).

13. Найдите собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, заданного матрицей $\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$. Можно ли из них выбрать базис? Если да, указать такой базис и записать в нем матрицу преобразования.

14. .Решите неравенство $\begin{vmatrix}1 & 2x & 0 & 0 & 0\\ 1-x & 4 & 0 & 0 & 0\\ 2 & -1 & x+4 & 3 & 2\\ -1 & 2 & -1 & 2x & -2\\ 1 & -1 & 2 & 3 & 2\end{vmatrix}<0$.

15. Найдите обратную матрицу для матрицы $A=\begin{Vmatrix}0 & 0 & 4 & 15\\ 0 & 0 & 1 & 6\\ -5 & -2 & 0 & 0\\ 7 & 3 & 0 & 0\end{Vmatrix}$.

16. Определить, при каких значениях параметра система линейных уравнений $\begin{cases}x_1-3x_2+4x_3+3x_5=-1\\ 3x_1-8x_2+x_3+2x_4=-2\\ 2x_1-5x_2-3x_3+2x_4-3x_5=-1\\ 6x_1-16x_2+2x_3+4x_4=\alpha\end{cases}$ совместна, и найти ее общее решение (представить решение как сумму частного решения и линейной комбинации фундаментальной системы решений соответствующей однородной системы).

17. Найти размерность и базис линейной оболочки векторов $a_1=(1,-1,2,1)^T, a_2=(1,2,1,-1)^T, a_3=(0,3,-1,-2)^T, a_4=(3,3,4,-1)^T$ в $\mathbb{R}^4$ и выражение остальных векторов через базисные.

18. В базисе e_1,e_2 линейное преобразование f имеет матрицу $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}$. Найти матрицу этого преобразования в базисе $e_1'=e_1-2e_2, e_2'=2e_1+e_2$.

19. Найти матрицу линейного отображения, переводящего векторы
$a_1 = (-2,1,-1)^T, a_2 = (1,-1,3)^T, a_3 = (1,2,-1)^T$ соответственно в векторы
$b_1 = (3,4)^T, b_2 = (-2,1)^T, b_3 = (1,5)^T$. Определить размерности и базисы ядра и образа этого отображения.

20. Вычислить матрицу перехода $C_{e \to e'}$ от базиса $e_1 = (-2,1,-1)^T, e_2 = (1,-1,3)^T, e_3 = (1,2,-1)^T$ к базису $e'_1 = (-1,2,3)^T, e'_2 = (2,1,2)^T, e'_3 = (0,2,1)^T$ в линейном пространстве $\mathbf{R}^3$ и определить координаты вектора $x = -e'_1 + 3e'_2 - e'_3$ в базисе e_1, e_2, e_3.

21. Линейное преобразование на двумерной плоскости векторов (приложенных в начале координат) $\mathbb{R}^2$ переводит любой вектор в его ортогональную проекцию на прямую $x + 2y = 0$. Запишите его матрицу в данном ортонормированном базисе, найдите собственные значения и собственные векторы.

22. Привести квадратичную форму:
а) $k = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2^2 + 8x_2x_3 - 2x_3^2$;
б) $k = x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$
к каноническому (нормальному) виду методом Лагранжа, определить ее ранг и индексы инерции.

23. Исследовать квадратичную форму на положительную и отрицательную определенность в зависимости от параметра α: $k = \alpha x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + \alpha x_2^2 + 4x_2x_3 + \alpha x_3^2$.

24. Построить при помощи процесса ортогонализации (и нормирования) ортонормированный базис линейной оболочки векторов $a_1 = (1,-1,2,1)^T, a_2 = (2,-1,1,2)^T, a_3 = (2,4,-3,1)^T$ (стандартный базис ортонормированный).

25. Найти базис из собственных векторов линейного преобразования, заданного матрицей:

а) $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$, б) $B = \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{Vmatrix}$; записать диагональную матрицу преобразования в найденном базисе.

26. Доказать, что пространство R^4 является прямой суммой подпространств $L_1 = \langle a_1 \rangle, L_2 = \langle a_2, a_3, a_4 \rangle$, и разложить вектор $x = (3,0,-2,-1)^T$ в сумму проекций на эти подпространства, где $a_1 = (-3,-2,3,-1)^T, a_2 = (-1,-3,2,3)^T, a_3 = (-1,-2,1,-3)^T, a_4 = (2,3,-2,-2)^T$.
27. В евклидовом пространстве R^4 (со стандартным скалярным произведением) дано подпространство $L = \langle a_1 = (1,-1,1,1)^T, a_2 = (1,4,-1,0)^T \rangle$.Разложить вектор $x = (2,1,-2,0)^T$ на сумму ортогональной проекции на L и ортогональной составляющей. Найти расстояние от вектора x до L и угол между x и L.
28. Найти размерность и базис суммы подпространств $A = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle, B = \langle b_1, b_2 \rangle$ в $\mathbb{R}^4$, где
$a_1 = (1,-1,2,0)^t, a_2 = (-1,0,1,2)^t, a_3 = (1,-1,3,-1)^t, b_1 = (1,-2,5,2)^t, b_2 = (0,-1,3,2)^t$.

29. Вычислите матрицу

$$25A^{-2}+(BA-2A)^T,\ A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix}.$$

30. Решите методом Гаусса систему линейных уравнений $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3-4x_4 = 1\\ 4x_1+5x_2-2x_3-x_5=3\\ 3x_1+4x_2+x_3+4x_4-x_5=2\\ -2x_1-3x_2-4x_3-8x_4+x_5=-1\end{cases}$ (ответ запишите в виде суммы частного решения и линейной комбинации фундаментальной системы решений соответствующей однородной системы).

31. Линейное преобразование φ в базисе $e: e_1=(3,2)^T, e_2=(1,1)^T$ имеет матрицу $A_\varphi=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$. Какой будет его матрица в базисе $e': e_1'=(-1,-1)^T, e_2'=(2,1)^T$?

32. Найти базис ядра и базис образа линейного преобразования $\varphi: R^4\to R^4$, заданного матрицей

$$A_\varphi=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0 & 2\\ 3 & 2 & -3 & 1\\ 3 & 0 & 3 & 3\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$ Является ли φ инъективным, сюръективным?