

Экзаменационная программа курса «Алгебра» для казахстанского филиала мехмата МГУ.

1 семестр 2021/2022 учебного года. Лектор – доцент Чубаров И.А.

1. Системы линейных уравнений и их матрицы. Элементарные преобразования. Алгоритм Гаусса упрощения системы линейных уравнений и матрицы (приведения к ступенчатому и простейшему виду). Главные и свободные неизвестные. Общее решение неоднородной системы линейных уравнений и его связь с общим решением соответствующей однородной системы уравнений.
2. Матрицы. Сложение матриц, умножение матрицы на число, свойства этих операций. Понятие о векторном пространстве.
3. Умножение матриц и его свойства. Обратная матрица, ее единственность. Обращение произведения. Транспонирование матриц. Транспонирование произведения.
4. Критерий обратимости матрицы в терминах элементарных преобразований. Вычисление обратной матрицы и решение матричных уравнений вида $AX = B$, $YA = B$ с помощью элементарных преобразований.
5. Перестановки, подстановки, их четность и знак. Умножение подстановок. Циклы и транспозиции. Разложение подстановки в произведения независимых циклов и транспозиций. Знак произведения подстановок.
6. Определение детерминанта квадратной матрицы по формуле полного развертывания. Определители диагональной и треугольной матриц. Основные свойства определителей (линейность по строкам и столбцам, кососимметричность, неизменность при транспонировании), дальнейшие свойства.
7. Миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы. Разложение определителя по строке и столбцу. Фальшивое разложение. Элементарные преобразования и элементарные матрицы. Определитель произведения двух квадратных матриц.
8. Исследование квадратной системы линейных уравнений. Формулы Крамера для решения квадратной системы линейных уравнений с ненулевым главным определителем.
9. Критерий существования и формула обратной матрицы. Присоединенная матрица.
10. Понятие векторного (линейного) пространства. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис, постоянство числа векторов базиса данного пространства, размерность. Координаты вектора в базисе, запись операций над векторами в координатах.
11. Векторное пространство R^n столбцов (строк). Понятие ранга конечной совокупности векторов. Алгоритм нахождения базиса столбцов при помощи элементарных преобразований. Ранги матрицы по строкам и столбцам. Теорема о ранге матрицы. Вычисление ранга при помощи элементарных преобразований. Теорема о базисном миноре, окаймляющие миноры.
12. Критерий равенства определителя нулю. Ранг произведения матриц. Факторизационный ранг матрицы.
13. Применение ранга к исследованию и решению систем линейных уравнений. Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений. Общее решение однородной и неоднородной систем линейных уравнений. Критерий совместности системы линейных уравнений (теорема Кронекера-Капелли) и её следствие (условие единственности решения).
14. Комплексные числа как пары действительных чисел. Алгебраическая запись. Алгебраические операции над комплексными числами, их свойства. Операция комплексного сопряжения. Вычисление обратного к ненулевому комплексному числу. Комплексные числа – поле.

15. Комплексная плоскость. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая запись. Умножение чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра. Извлечение корней из комплексных чисел. Группа комплексных корней из 1.
16. Многочлены от одной переменной. Стандартная запись, степень многочлена. Сложение и умножение многочленов, степень произведения. Многочлены над полем – целостное кольцо. Деление многочленов с остатком. Теорема Безу и корни многочлена. Алгоритм Горнера.
17. Делимость многочленов. Наибольший общий делитель двух многочленов. Алгоритм Евклида. Неприводимые многочлены. Основная теорема арифметики для многочленов.
18. Формулировка основной теоремы алгебры комплексных чисел. Неприводимые многочлены над \mathbb{R} и \mathbb{C} . Кратность корня и неприводимого множителя многочлена, ее уменьшение при дифференцировании. Избавление от кратных корней. Интерполяционный многочлен Лагранжа.
19. Группы, примеры групп. Группа классов вычетов по модулю n . Подгруппы. Порядок элемента. Циклические группы: примеры, их подгруппы, теорема об изоморфизме. Смежные классы по подгруппе, теорема Лагранжа и ее следствия. Симметрическая и знакопеременная группы. Теорема Кэли.
20. Кольца, подкольца. Примеры колец. Делители нуля и обратимые элементы. Целостные кольца. Поля, примеры полей. Характеристика поля. Конечное поле.
21. Поле рациональных дробей от одной переменной. Правильные дроби. Простейшие дроби, представление правильной рациональной дроби в виде суммы простейших дробей. Простейшие дроби над полями действительных и комплексных чисел.
22. Многочлены от нескольких переменных, степень многочлена. Лексикографический порядок на одночленах. Старший одночлен произведения многочленов. Симметрические многочлены. Основная теорема о симметрических многочленах. Теорема Виета.

Литература.

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч. I. Основы алгебры. Ч. III. Основные структуры алгебры. – М.: Физматлит, 2000 – 2005.
2. Марков В.Т. Конспект лекций по алгебре – 1 семестр (pdf).
3. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. Физматлит, 1984.
4. Чубаров И.А. Записки лекций и семинаров онлайн - занятий 2021 года.