Экзаменационная программа курса «Линейная алгебра» для факультета ББ МГУ.
1 семестр 2021/2022 учебного года. Лектор – доцент Чубаров И.А.

1. Системы линейных уравнений. Алгоритм Гаусса упрощения системы линейных уравнений и матрицы (приведения к ступенчатому и простейшему виду). Главные и свободные неизвестные. Общее решение неоднородной системы линейных уравнений и его связь с общим решением соответствующей однородной системы уравнений.
2. Матрицы. Сложение матриц, умножение матрицы на число, свойства этих операций.
3. Умножение матриц и его свойства. Обратная матрица, ее единственность. Обращение произведения. Транспонирование матриц. Транспонирование произведения.
4. Перестановки (подстановки), их четность и знак. Определение детерминанта квадратной матрицы по формуле полного развертывания. Определители диагональной и треугольной матриц. Основные свойства определителей (линейность по строкам и столбцам, кососимметричность, неизменность при транспонировании), дальнейшие свойства.
5. Разложение определителя по строке и столбцу. Фальшивое разложение. Элементарные преобразования и элементарные матрицы. Определитель произведения двух квадратных матриц.
6. Исследование квадратной системы линейных уравнений. Формулы Крамера для решения квадратной системы линейных уравнений с ненулевым главным определителем.
7. Критерий существования и формула обратной матрицы. Присоединенная матрица. Вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований. Два способа решения матричных уравнений вида AX = B, YA = B (где $\det A \neq 0$): с помощью обратной матрицы и элементарных преобразований.
8. Векторы на плоскости и в пространстве, линейные операции над ними**.** Понятие о линейном пространстве. Базис, координаты вектора в базисе, запись операций над векторами в координатах. Разложение вектора по базису на прямой, на плоскости и в пространстве.
9. Скалярное произведение двух векторов. Выражение ортогональной проекции одного вектора на другой с помощью скалярного произведения. Свойства скалярного произведение и его вычисление в координатах. Ортонормированный базис, разложение вектора по ортонормированному базису.
10. Векторное произведение двух векторов, его свойства, выражение в координатах. Применения: критерий коллинеарности двух векторов, вычисление площади параллелограмма.
11. Смешанное произведение трех векторов, его свойства, выражение в координатах. Объем ориентированного параллелепипеда. Критерий компланарности (линейной зависимости) трех векторов.
12. Радиус-вектор точки. Декартова система координат. Выражение координат вектора через координаты его конца и начала. Прямоугольная (ортонормированная) декартова система координат. Формула расстояния между двумя точками.
13. Прямая на плоскости. Векторное параметрическое и нормальное уравнения прямой на плоскости. Уравнения прямой на плоскости в координатах: параметрические, каноническое, общее линейное, с угловым коэффициентом. Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Вычисление расстояния от точки до прямой, между двумя параллельными прямыми на плоскости, угла между двумя прямыми.
14. Прямая в пространстве. Векторное параметрическое уравнение уравнение прямой. Координатные формы уравнений прямой: параметрические, канонические. Вычисление угла между двумя прямыми, расстояния от точки до прямой, расстояния между двумя параллельными и скрещивающимися прямыми в пространстве. Задание прямой как линии пересечения двух плоскостей.
15. Плоскость в пространстве. Векторное параметрическое и нормальное уравнения плоскости, уравнение в виде смешанного произведения. Координатные формы уравнения плоскости: общее линейное и с помощью определителя. Взаимное расположение двух плоскостей, прямой и плоскости в пространстве. Вычисление угла между двумя плоскостями, расстояния от точки до плоскости, расстояния между двумя параллельными плоскостями, угла между прямой и плоскостью.
16. Определение линейного пространства. Примеры. Линейная зависимость и независимость векторов. Основная лемма о линейной зависимости. Базис, постоянство числа векторов базиса данного пространства, размерность. Координаты вектора в базисе, запись операций над векторами в координатах. Матрица перехода от старого базиса к новому. Изменение координат вектора при изменении базиса.
17. Линейное пространство R^n столбцов (строк). Понятие ранга конечной совокупности векторов. Определение ранга матрицы, ранги по строкам и столбцам. Теорема о ранге матрицы. Вычисление ранга при помощи элементарных преобразований (алгоритм нахождения базисных столбцов). Теорема о базисном миноре, равенство ранга матрицы порядку ее базисного минора, окаймляющие миноры. Критерий равенства определителя нулю.

18. Применение ранга к исследованию и решению систем линейных уравнений. Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений. Общее решение однородной и неоднородной систем линейных уравнений. Критерий совместности системы линейных уравнений (теорема Кронекера-Капелли) и её следствие (условие единственности решения).
19. Подпространства в линейном пространстве. Способы задания подпространств. Линейная оболочка конечного набора векторов и ее размерность. Составление системы линейных однородных уравнений, задающих линейную оболочку.
20. Сумма подпространств. Формула для размерности суммы двух подпространств. Прямая сумма подпространств: определение и критерии.
21. Линейные отображения и линейные преобразования линейных пространств. Ядро и образ, связь между их размерностями. Матрица линейного отображения, вычисление ядра и образа. Матрица линейного преобразования и ее изменение при замене базиса. Неизменность определителя и ранга матрицы линейного преобразования при замене базиса. Действия над линейными преобразованиями, матричная форма действий. Теорема о ранге произведения*.
22. Собственный вектор и собственное значение линейного преобразования. Линейная независимость собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям. Отыскание собственных векторов. Характеристическое уравнение и характеристический многочлен матрицы линейного оператора. Диагонализируемость матрицы линейного преобразования (необходимое и достаточное условие – существование базиса из собственных векторов; достаточное условие – наличие n различных собственных значений).
23. Евклидово пространство. Неравенство Коши-Буняковского. Определение угла между векторами. Ортонормированный базис, его построение по алгоритму ортогонализации (Грама-Шмидта) с последующей нормировкой. Ортогональность матрицы перехода между ортонормированными базисами. Ортогонального дополнение к подпространству. Разложение вектора в сумму ортогональной проекции на подпространство и ортогональной составляющей.
24. Билинейные функции (формы), их матрицы и запись в координатах. Изменение матрицы билинейной формы при замене базиса, неизменность ее ранга и знака определителя. Квадратичная форма, отвечающая симметрической билинейной форме. Приведение квадратичной формы к каноническому (нормальному) виду методом выделения квадратов (алгоритм Лагранжа). Индексы инерции.
25. Положительно (отрицательно) определенные квадратичные формы. Исследование знака квадратичной формы по ее каноническому виду. Критерий Сильвестра положительной *(без доказательства)* и отрицательной определенности квадратичной формы.
26. * Линейные преобразования евклидовых пространств: самосопряженные и ортогональные. Приведение квадратичной формы к главным осям при помощи собственных векторов и ортогональной замены координат.

Список литературы.

Основная.

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.– М.: Физматлит, 2005 или Лань, 2016 - 2018
2. Беклемишева Л.А., Беклемишев Д.В., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре.– М.: Физматлит, 2011 или СП-б.: Лань, 2008 - 2018.
3. Ильин В.А., Ким Г.Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. - М., МГУ, 2005.
4. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч. I. Основы алгебры. Ч. II. Линейная алгебра. – М.: Физматлит, 2000 – 2005.

Дополнительная.

5. Шевцов Г.С. Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты. М.: Финансы и статистика, 2003.
6. Кряквин В.Д. Линейная алгебра. Пособие к решению задач. – М.: Вузовская книга, 2004.

Примечание. В билете один вопрос и одна задача. Разбивка по билетам не совпадает с пунктами программы. Претендующие на 4 или 5 должны доказать хотя бы одну теорему из билета.