

Вопросы к экзамену – осенний семестр 2024-2025 гг.

1-й курс, 3-й поток, лектор — О.В. Маркова

1. Система линейных алгебраических уравнений. Совместность и определённость. Элементарные преобразования и эквивалентные системы.
2. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса. Критерии совместности и определенности в терминах ступенчатого вида. Улучшенный ступенчатый вид.
3. Арифметическое пространство. Линейная зависимость строк (столбцов). Основная лемма о линейной зависимости.
4. База и ранг системы строк (столбцов). Теорема о дополнении до базы. Корректность определения ранга.
5. Ранг матрицы (совпадение рангов системы строк, системы столбцов и числа ненулевых строк в ступенчатом виде).
6. Критерий совместности и определенности системы линейных уравнений в терминах рангов матриц (теорема Кронекера-Капелли).
7. Подпространство решений однородной системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений.
8. Группа подстановок конечного множества. Знак подстановки (четность). Независимость четности от выбора таблицы, задающей подстановку.
9. Разложение подстановки в произведение транспозиций. Изменение четности при умножении на транспозицию. Знак произведения подстановок.
10. Определитель квадратной матрицы, его основные свойства (линейность, кососимметричность).
11. Определитель транспонированной матрицы. Изменение определителя при элементарных преобразованиях строк (столбцов) матрицы.
12. Определитель треугольной матрицы. Критерий равенства определителя нулю.
13. Определитель матрицы с углом нулей.
14. Определитель Вандермонда.
15. Миноры и алгебраические дополнения элементов. Разложение определителя по строке (столбцу). Лемма о «фальшивом» разложении определителя.
16. Теорема Крамера. Формулы Крамера для решения определённых квадратных систем линейных уравнений.
17. Теорема об окаймляющих минорах. Теорема о ранге матрицы.
18. Операции над матрицами и их основные свойства. Обобщенная ассоциативность умножения матриц.
19. Связь операции транспонирования с операциями суммы и умножения матрицы на число. Транспонирование произведения матриц.
20. Умножение матрицы на диагональную матрицу слева и справа. Единичная матрица, её единственность. Скалярные матрицы.
21. Матричные единицы и их умножение. Элементарные матрицы и их связь с элементарными преобразованиями.
22. Определитель произведения матриц.
23. Обратная матрица. Единственность обратной матрицы. Критерий существования и формула для нахождения элементов обратной матрицы (с помощью алгебраических дополнений).

24. Критерий существования и способ нахождения обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.
25. Ранг суммы и произведения матриц.
26. Факторизационный ранг матрицы. Матрицы ранга 1.
27. Матричная запись системы линейных уравнений. Строение общего решения неоднородной системы уравнений, его геометрическая интерпретация.
28. Подпространство решений однородной системы линейных уравнений. Задание произвольного подпространства арифметического пространства однородной системой линейных уравнений.
29. Определение группы. Примеры групп. Единственность нейтрального и обратного элементов. Подгруппы. Изоморфизм групп.
30. Циклические группы. Порядок элемента. Подгруппы циклических групп. Изоморфизм циклических групп одинаковых порядков.
31. Смежные классы. Теорема Лагранжа и ее следствия.
32. Определение кольца. Примеры колец. Кольца вычетов. Обратимые элементы и делители нуля в кольцах. Определение поля. Примеры полей, построение поля из 4-х элементов.
33. Построение поля комплексных чисел. Комплексная плоскость. Модуль и аргумент комплексного числа. Алгебраическая и тригонометрическая форма записи комплексных чисел. Операция сопряжения комплексных чисел и ее свойства.
34. Формула Муавра. Корни целой степени из комплексного числа. Группа комплексных корней из единицы.
35. Кольцо многочленов от одной переменной над полем. Возможность и единственность деления на ненулевой многочлен с остатком.
36. Наибольший общий делитель двух многочленов, его линейное выражение через заданные многочлены, алгоритм Евклида.
37. Неприводимые многочлены. Факториальность кольца многочленов от одной переменной над полем.
38. Многочлен как функция. Схема Горнера. Корни многочлена, кратность неприводимого множителя и корня многочлена. Понижение кратности неприводимого множителя (корня) при дифференцировании, избавление от кратных множителей (корней).
39. Интерполяционный многочлен, формула Лагранжа и метод Ньютона для его построения.
40. Лемма о возрастании модуля комплексного многочлена. Лемма Д'Аламбера.
41. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел. Неприводимые многочлены над полями комплексных и действительных чисел.
42. Поле дробей коммутативного кольца без делителей нуля. Поле рациональных дробей. Правильные дроби.
43. Простейшие дроби. Разложение правильной дроби в сумму простейших дробей, случай вещественного и комплексного полей.
44. Границы действительных корней многочлена. Теорема Декарта о числе положительных корней многочлена (без доказательства).
45. Теорема Штурма о числе корней многочлена на отрезке. Стандартная система Штурма.
46. Кольцо многочленов от нескольких переменных. Лексикографический порядок на одночленах. Старший член произведения многочленов.
47. Симметрические многочлены, основные свойства и выражение через элементарные симметрические многочлены (основная теорема о симметрических многочленах).
48. Элементарные симметрические многочлены. Формулы Виета.