

## Вопросы к экзамену по алгебре, гр. 101 – 106.

лектор Е.С.Голод 2014-2015 уч.г.

1. Системы линейных алгебраических уравнений и связанные с ними матрицы. Приведение матрицы к ступенчатому и сильно ступенчатому виду посредством элементарных преобразований над строками матрицы. Всякая система эквивалентна ступенчатой.
2. Метод Гаусса решения и исследования систем линейных алгебраических уравнений. Критерии совместности и определенности такой системы в терминах ступенчатого вида.
3. Однородные системы линейных алгебраических уравнений и свойства множеств их решений. Связь между решениями совместной неоднородной системы и соответствующей ей однородной.
4. Линейные комбинации системы векторов, линейная оболочка. Понятие линейной зависимости (независимости) системы векторов и его свойства.
5. Основная лемма о линейной зависимости.
6. Базис системы векторов. Базис как максимальная линейно независимая подсистема. Существование базиса у любой системы векторов в  $R^n$ . Стандартный базис в  $R^n$ . Единственность линейного выражения вектора через базис. Все базисы данной системы векторов содержат одно и то же число элементов.
7. Ранг системы векторов и его свойства.
8. Алгоритм нахождения базиса и ранга конечной системы векторов и линейных выражений всех векторов системы через найденный базис.
9. Ранг матрицы как общее значение ранга системы ее строк, ранга системы ее столбцов и числа ненулевых строк в ее ступенчатом виде.
10. Критерии совместности и определенности системы линейных алгебраических уравнений в терминах рангов матриц (теорема Кронеккера – Капелли).
11. Понятие подпространства. Размерность линейной оболочки. Подпространство решений однородной системы линейных алгебраических уравнений, его базис (фундаментальная система решений) и размерность.
12. Множества и отображения. Образ и полный прообраз подмножества. Сюръективные, инъективные и биективные отображения. Композиция (произведение) отображений, ее ассоциативность. Обратное отображение.
13. Некоторые формулы для числа отображений и подмножеств конечного множества. Формула бинома Ньютона.

14. Понятие группы. Группа перестановок (симметрическая группа). Разложения перестановки в произведения независимых циклов и транспозиций.
15. Четность (знак) перестановки, ее поведение при умножении перестановок. Знакопеременная группа.
16. Определитель квадратной матрицы. Определители второго и третьего порядка. Определитель треугольной (косотреугольной) матрицы. Неизменяемость определителя при транспонировании.
17. Свойства полилинейности и кососимметричности определителя.
18. Поведение определителя при элементарных преобразованиях над его строками (столбцами). Вычисление определителя посредством приведения к треугольному или косотреугольному виду. Различия в ступенчатом виде для невырожденных и вырожденных квадратных матриц. Сильно ступенчатый вид невырожденной матрицы.
19. Критерий равенства определителя нулю. Теорема о ранге матрицы (характеризация ранга в терминах миноров).
20. Критерий определенности квадратной системы линейных алгебраических уравнений. Правило Крамера.
21. Определитель с углом нулей.
22. Разложение определителя по строке (столбцу). Фальшивое разложение.
23. Определитель Вандермонда. Приложение к задаче об интерполяционном многочлене.
24. Операции сложения матриц и умножения матрицы на скаляр, их основные свойства. Ранг суммы матриц. Представление матрицы как линейной комбинации матричных единиц.
25. Умножение матриц, свойства дистрибутивности и ассоциативности, существование единицы, поведение при транспонировании.
26. Элементарные матрицы, их связь с элементарными преобразованиями над строками и столбцами матрицы. Представление матрицы в виде произведения элементарных матриц и ступенчатой матрицы. Представление невырожденной матрицы в виде произведения элементарных.
27. Ранг произведения матриц.
28. Определитель произведения матриц.
29. Обратная матрица, ее единственность, критерий существования, явная формула. Вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.
30. Обобщенный закон ассоциативности для множества с частичной бинарной операцией.

31. Понятие полугруппы. Единица, обратный элемент, их единственность. Примеры полугрупп. Подгруппа обратимых элементов. Степени элемента и их свойства.
32. Понятие кольца и поля. Простейшие свойства кольца. Делители нуля и обратимые элементы. Примеры колец и полей.
33. Построение поля комплексных чисел. Операция комплексного сопряжения.
34. Изображение комплексных чисел на плоскости с заданной прямоугольной декартовой системой координат. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра. Извлечение корней из комплексных чисел.
35. Комплексные корни из единицы. Первообразные корни. Применение к функции Эйлера.
36. Кольца вычетов по модулю целого числа, делители нуля и обратимые элементы в них. Когда кольцо вычетов является полем? Характеристика поля.
37. Построение кольца многочленов от одной переменной над коммутативным кольцом с единицей. Степень многочлена и старший член. Отсутствие делителей нуля и обратимые элементы в кольце многочленов над областью целостности.
38. Деление с остатком в кольце многочленов от одной переменной.
39. Понятие деления в области целостности. Ассоциированные элементы. Наибольший общий делитель. Существование наибольшего общего делителя в кольце многочленов от одной переменной над полем и в кольце целых чисел и его представление в виде  $\text{НОД}(f,g) = uf + vg$  (алгоритм Евклида). Ограничение на степени  $u$  и  $v$  в случае многочленов.
40. Свойства взаимно простых многочленов. Наименьшее общее кратное.
41. Неприводимые многочлены и простые числа. Теорема об однозначном разложении на неприводимые (простые) множители в кольце многочленов от одной переменной над полем и в кольце целых чисел. Применение к вопросу о делимости и нахождению НОД и НОК.
42. Многочлены как функции. Теорема Безу. Корни многочлена и их кратности. Число корней с учетом кратностей многочлена над полем не превосходит его степени.
43. Функциональное и алгебраическое равенство многочленов. Связь между этими свойствами над бесконечными и конечными полями. Интерполяционный многочлен Лагранжа.
44. Операция дифференцирования в кольце многочленов.

45. Поведение при дифференцировании кратности неприводимых множителей (корней) многочлена над полем характеристики 0. Освобождение от кратных неприводимых множителей (корней).
46. Теорема об алгебраической замкнутости поля комплексных чисел (формулировка). Неприводимые многочлены и разложение на неприводимые множители многочленов над полем комплексных чисел. Число корней комплексного многочлена с учетом кратностей. Граница для корней комплексного многочлена.
47. Комплексные корни вещественного многочлена. Неприводимые многочлены и разложение на неприводимые множители многочленов над полем действительных чисел.
48. Теорема Штурма.
49. Поле частных области целостности.
50. Поле рациональных дробей. Разложение правильной дроби в сумму простейших дробей. Случай полей комплексных и действительных чисел.
51. Кольцо многочленов от многих переменных. Допустимые порядки на мономах. Старший член многочлена и его свойства. Лексикографически-степенной порядок на мономах.
52. Формулы Виета. Симметрические многочлены, свойства их старших членов. Существование и единственность представления произвольного симметрического многочлена в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов.
53. Кольцо классов вычетов кольца многочленов от одной переменной по модулю данного многочлена. Когда оно является полем? Существование расширения поля, в котором заданный многочлен от одной переменной разлагается на линейные множители.
54. Доказательство теоремы об алгебраической замкнутости поля комплексных чисел.
55. Порядок элемента в группе. Условие равенства двух степеней элемента. Порядок степени элемента. Порядки элементов в группе перестановок.
56. Понятия подгруппы, подкольца, подполя. Примеры. Циклические подгруппы. Циклические группы и их подгруппы.
57. Понятие изоморфизма групп, колец. Примеры. Классификация циклических групп с точностью до изоморфизма.
58. Смежные классы по подгруппе и их свойства. Теорема Лагранжа. Порядок элемента в конечной группе является делителем ее порядка. Группы простого порядка.
59. Гомоморфизмы групп, колец и их свойства. Гомоморфизмы циклических групп. Теорема Кейли.

60. Результат двух многочленов от одной переменной. Приложение к решению системы из двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными.

61. Представление результата через корни многочленов. Дискриминант многочлена.