Линейные функции.

1. а) Пусть $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Показать, что отображение

$$f : X \mapsto \mathrm{tr} AX$$

является линейной функцией. Найти ее координатную запись в стандартном базисе пространства матриц $M_n(\mathbb{R})$.

б) Показать, что для любой линейной функции f на пространстве матриц $M_n(\mathbb{R})$ найдется такая матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$, что $f(X) = \mathrm{tr} AX$ для всех $X \in M_n(\mathbb{R})$.

2. В базисе (e_1, e_2, e_3) пространства $\mathbb{R}^3$ задана линейная функция

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - x_2 + 3x_3.$$

Найти координатную запись этой функции в базисе $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$, если

$$\tilde{e}_1 = e_1 + e_2, \tilde{e}_2 = e_2 + e_3, \tilde{e}_3 = e_3 + e_1.$$

Ответ: $f(\tilde{x}_1\tilde{e}_1 + \tilde{x}_2\tilde{e}_2 + \tilde{x}_3\tilde{e}_3) = 1\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 + 5\tilde{x}_3$.

3. В пространстве $\mathbb{R}^3$ задан базис (e_1, e_2, e_3):

а) $(e_1 = (1,0,0), e_2 = (1,1,0), e_3 = (1,1,1))$;

б) $(e_1 = (2,7,3), e_2 = (3,9,4), e_3 = (1,5,3))$;

Найти сопряженный с ним базис (f^1, f^2, f^3).

Ответ: а) $f^1(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = x_1 - x_2$, $f^2(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = x_2 - x_3$, $f^3(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = x_3$.

б) $f^1(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = -\frac{7}{3}x_1 + \frac{5}{3}x_2 - 2x_3, f^2(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = 2x_1 - x_2 + x_3, f^3(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = -\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + x_3$

4. В пространстве $V = \mathbb{R}^3$ задан базис $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ и в базисе $\mathcal{E}$ записаны три линейные функции f^1, f^2, f^3:

а) $(e_1 = (1,1,0), e_2 = (1,0,1), e_3 = (0,0,1))$;

$f^1(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3, f^2(x) = 2x_1 + 3x_2 + x_3, f^3(x) = 3x_1 + 2x_2 + x_3$;

б) $(e_1 = (1,1,1), e_2 = (1,1,0), e_3 = (1,0,0))$;

$f^1(x) = x_1 + x_2 + x_3, f^2(x) = x_1 + x_2, f^3(x) = x_1$.

Образуют ли функции f^1, f^2, f^3 базис в V^*? Если да, найти такие векторы $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3 \in \mathbb{R}^3$, что $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ образует базис, для которого (f^1, f^2, f^3) является сопряженным базисом. (Т.о., e_1, e_2, e_3 даны в стандартном базисе и нужно найти координаты векторов $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ в стандартном базисе).

Ответ: а) $\tilde{e}_1 = (-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}, \frac{1}{3}), \tilde{e}_2 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}), \tilde{e}_3 = (\frac{1}{6}, -\frac{5}{12}, -\frac{1}{3})$.

б) $\tilde{e}_1 = (1,0,0), \tilde{e}_2 = (0,1,0), \tilde{e}_3 = (0,0,1)$.