

**ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА ПО АЛГЕБРЕ
ВТОРОЙ КУРС, ПЕРВЫЙ ПОТОК, МЕХМАТ, ОСЕНЬ 2025 ГОДА**

Клячко

1. Группы. Примеры: диэдральная группа, группа кватернионов, симметрическая и знакопеременная группа. Алгебраическое описание диэдральной группы. Изоморфизм. Группа автоморфизмов группы.
2. Подгруппы. Системы порождающих. Какую подгруппу порождает множество всех транспозиций в симметрической группе? Критерий того, что данное подмножество группы является подгруппой.
3. Какую подгруппу порождает множество всех тройных циклов в симметрической группе?
4. Какую подгруппу порождает множество всех трансвекций в $\mathbf{GL}_n(F)$, где F — поле?
5. Порядок элемента и порядок подгруппы, порождённой этим элементом. Описание циклических групп с точностью до изоморфизма.
6. Подгруппы циклических групп. Сколько подгрупп в циклической группе порядка сто?
7. Смежные классы. Теорема Лагранжа. Порядок элемента и порядок подгруппы, им порождённой. Группы порядка 17. Что получится, если элемент группы G возвести в степень $|G|$? Индекс. Нормальные подгруппы. Сопряжённые подгруппы.
8. Гомоморфизмы групп. Ядро и образ. Нормальность ядра. Факторгруппа. Теорема о гомоморфизмах. Примеры.
9. Факторгруппа по центру и группа внутренних автоморфизмов; её нормальность в группе всех автоморфизмов. Группа внешних автоморфизмов.
10. Теорема Кэли.
11. Теорема о том, что каждая подгруппа H конечного индекса содержит нормальную подгруппу конечного индекса (делящего $|G:H|!$).
12. Прямые произведения (внешнее и внутреннее определение и связь между ними). Когда прямое произведение циклических групп является циклической группой?
13. Факторгруппа $A \times B$ по подгруппе $H \times K$, где $H \triangleleft A$, а $K \triangleleft B$.
14. Конечно порождённые свободные абелевы группы, базисы. Инвариантность ранга. Какие группы изоморфны факторгруппам конечно порождённых свободных абелевых групп?
15. Критерий того, что данный элемент свободной абелевой группы можно включить в базис.
16. Теорема о подгруппах свободных абелевых групп (о согласованных базисах).
17. Группа автоморфизмов свободной абелевой группы конечного ранга.
18. Теорема о строении конечно порождённых абелевых групп (без единственности).
19. Периодическая часть и p -компонента абелевой группы. Разложение конечной абелевой группы в сумму p -компонент?
20. Единственность разложения конечно порождённой абелевой группы в прямую сумму бесконечных и примарных циклических групп.
21. Конечные подгруппы мультипликативной группы поля.
22. Действия группы на множестве. Примеры. Действия группы на себе левыми сдвигами, правыми сдвигами и сопряжением. Различные орбиты не пересекаются.
23. Связь между длиной орбиты и индексом стабилизатора. Нормализаторы и централизаторы.
24. Связь между стабилизаторами разных точек одной орбиты.
25. Нетривиальность центра конечной p -группы. Пересечение центра p -группы с нормальной подгруппой.
26. Группы с циклической факторгруппой по центру. Группы порядка p^2 .
27. Первая теорема Силова (о существовании).
28. Порядки p -подгрупп данной конечной группы.
29. Вторая теорема Силова (о сопряжённости). Следствие о нормальных силовских подгруппах.

30. Третья теорема Силова (о количестве).
31. Группы порядка 15, 33, 35,...
32. Лемма Бернсайда о числе орбит и её следствие о покрытии группы сопряжёнными подгруппами.
33. Коммутаторы и коммутант. Коммутант группы S_n и A_n при $n > 4$.
34. Коммутант полной линейной группы над достаточно большим полем.
35. Связь между коммутантом и нормальными подгруппами, факторгруппы по которым абелевы. Число гомоморфизмов из симметрической группы S_{2025} в циклическую группу порядка сто.
36. Разрешимые группы. Разрешимость подгрупп и факторгрупп разрешимых групп. «Обратное» утверждение. Какие симметрические группы разрешимы?
37. Разрешимость группы невырожденных треугольных матриц над полем.
38. Разрешимость конечных p -групп.
39. Простые группы. Простота знакопеременных групп.
40. Композиционный ряд. Теорема Жордана–Гёльдера.
41. Когда факторгруппа по центру циклическая? Группы порядка p^2 .
42. Теорема о соответствии подгрупп при эпиморфизмах (то есть при сюръективных гомоморфизмах).
43. Кольца и алгебры. Подкольца и подалгебры. Гомоморфизмы, ядро, идеалы (в кольцах и алгебрах). Ядро является идеалом.
44. Теорема о гомоморфизмах для колец и для алгебр.
45. Простые кольца и алгебры. Простота кольца матриц над телом.
46. Кольца главных идеалов. Идеалы в кольце целых чисел и в кольце многочленов от одной переменной над полем.
47. Для каких идеалов в кольце многочленов от одной переменной над полем факторкольцо является полем? Явное построение поля из восьми элементов.
48. Существует ли поле из ста элементов?
49. Строение простых расширений полей.
50. Теорема о башне расширений полей (об умножении размерностей).
51. Алгебраические и трансцендентные элементы. Алгебраические расширения полей.
52. Поле алгебраических чисел. Почему оно поле? Почему оно алгебраически замкнуто?
53. Поле разложения: существование и единственность.
54. Классификация конечных полей.
55. Простота конечных расширений конечных полей. Каких степеней бывают неприводимые многочлены над $\mathbb{F}_{17}$?
56. Подполя конечных полей (критерий вложимости одного конечного поля в другое).
57. Автоморфизмы конечных полей.
58. Линейные и матричные представления групп. Примеры. Регулярное представление. Изоморфизм представлений.
59. Неприводимые представления. Примеры. Гомоморфизмы представлений. Лемма Шура.
60. Неприводимое $(n - 1)$ -мерное представление симметрической группы S_n .
61. Прямая сумма представлений. Гомоморфизмы в прямую сумму представлений.
62. Теорема Машке.
63. Неприводимые комплексные представления абелевых групп. Одномерные комплексные представления произвольных групп.
64. Как посчитать сумму квадратов размерностей неприводимых комплексных представлений конечной группы?
65. Неприводимые комплексные представления групп S_3 и A_4 .
66. Алгебра эндоморфизмов комплексного представления конечной группы и центр этой алгебры.
67. Алгебра эндоморфизмов регулярного представления и групповая алгебра.
68. Число неприводимых комплексных представлений конечной группы.
69. Соотношения ортогональности для характеров (можно без доказательства, если студент не претендует на «пять с плюсом»). Почему представление однозначно определяется своим характером?