ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ И ГЕОМЕТРИИ ПЕРВЫЙ КУРС, ПОТОК 141-142, МЕХМАТ, ВЕСНА 2025 ГОДА

Клячко

1. Векторные пространства: определение, примеры, следствия из аксиом Линейная зависимость, базис, размерность. Векторные пространства изоморфны тогда и только тогда, когда размерности совпадают. Всякое конечномерное векторное пространство изоморфно арифметическому. Поведение координат вектора при замене базиса.
2. Критерий того, что подмножество векторного пространства является подпространством. Сумма и пересечение подпространств и связь размерностей.
3. Линейные функции. Сопряжённое пространство. Изменение координат функционалов при изменении базиса. Когда «сопряжённый базис» является базисом?
4. Когда «канонический изоморфизм» является изоморфизмом?
5. Линейные отображение: ядро и образ — подпространства, критерий инъективности, связь размерностей ядра и образа, матрица линейного отображения, изменение матрицы при замене базисов, ранг — это единственный инвариант. Линейные операторы: изменение матрицы при замене базиса.
6. Характеристический многочлен оператора, определитель и след оператора. Какие многочлены является характеристическими (для подходящих операторов)?
7. Теорема Гамильтона–Кэли.
8. Корни характеристического многочлена, собственные векторы, собственные значения, собственные подпространства. Прямая сумма подпространств: определение и равносильность условию на пересечения. Сумма собственных подпространств прямая.
9. Критерий диагонализируемости на языке суммы собственных подпространств. Геометрическая и алгебраическая кратность собственного значения и неравенство, связывающее эти кратности. Подобие операторов и матриц. Критерий диагонализируемости на языке алгебраических и геометрических кратностей.
10. Корневые (векторы и) подпространства. Прямота их суммы. Эта сумма равна всему пространству (в конечномерном случае), если характеристический многочлен раскладывается на линейные множители.
11. Инвариантные подпространства. Инвариантность корневых и собственных подпространств. Локально нильпотентные и нильпотентные операторы. В конечномерном векторном пространстве нильпотентность равносильна локальной нильпотентности.
12. Канонический вид нильпотентного оператора (без единственности).
13. Теорема о жордановой нормальной форме (без единственности).
14. Единственность жордановой нормальной формы.
15. Алгоритм нахождения жордановой нормальной формы.
16. Минимальный многочлен. Он делит все аннулирующие. А корни у минимального такие же, как у характеристического.
17. Как найти минимальный многочлен по жордановой нормальной форме? Как по минимальному многочлену понять диагонализируем ли оператор (над произвольным полем)?
18. Всякая комплексная матрица подобна своей транспонированной.
19. Извлечение корней из невырожденных комплексных матриц.
20. Комплексное подобие двух рациональных матриц влечёт их рациональное подобие.
21. Билинейные функции: их матрицы, закон изменения при замене базиса, разложение в сумму симметрической и кососимметрической.
22. Диагонализируемость симметрических билинейных функций.
23. Канонический вид квадратичных функций над $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$ (с единственностью, то есть инвариантность индексов инерции).
24. Канонический вид кососимметрической функции (с единственностью).
25. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к диагональному виду.
26. Метод Якоби приведения квадратичной формы к диагональному виду. Когда он работает? Теорема Якоби. Как восстановить индексы инерции по главным минорам?

27. Критерий Сильвестра.

28. Евклидовы пространства: неравенство Коши–Буняковского и неравенство треугольника, длина вектора, угол между векторами.

29. Ортонормированный базис, ортогонализация Грама–Шмидта. Разложения пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения.

30. Объём параллелепипеда, его выражение через определитель матрицы Грама.

31. Ортогональные операторы и ортогональные матрицы (и их определители). Какие бывают ортогональные операторы в двумерном пространстве?

32. Наличие двумерного или одномерного инвариантного подпространства у любого вещественного оператора.

33. Инвариантность ортогонального дополнения к инвариантному подпространству для ортогонального оператора.

34. Канонический вид для ортогонального и симметрического оператора.

35. Полярное разложение.

36. Приведение квадратичной формы к главным осям. Одновременная диагонализируемость двух вещественных симметрических функций, одна из которых положительно определена.

37. Полуторалинейные функции, их матрицы, эрмитовость и косоэрмитовость (функций и матриц), восстановление эрмитовой функции по $f(v,v)$.

38. Аналог теоремы Якоби и критерия Сильвестра для эрмитовых функций.

39. Унитарные пространства. Ортогонализация Грама–Шмидта.

40. Сопряжённые операторы. Эрмитовы, косоэрмитовы и унитарные операторы, их матрицы и канонический вид.

41. Аффинные пространства. Репер. Поведение координат при замене репера. Аффинные преобразования и их матрицы.

42. Плоскости в аффинном пространстве. Их задание линейных системами уравнений.

43. Характеризация плоскостей через прямые.

44. Барицентрические комбинации точек. Аффинная оболочка. Связь между размерностями пересечения двух плоскостей и аффинной оболочки их объединения.

45. Аффинно-квадратичные функции: поведение при замене репера, «канонический» вид (без единственности в этом вопросе, но над любым полем характеристики не два).

46. Единственность канонического вида аффинно-квадратичной функции над полями комплексных и вещественных чисел.

47. Квадрики. Единственность уравнения, задающего квадрику над бесконечным полем.

48. Аффинное евклидово пространство. Расстояние между двумя плоскостями.

49. Движения в аффинном евклидовом пространстве. Неподвижные точки и инвариантные прямые. Классификация движений в двумерном и трёхмерном евклидовом пространстве.

50. Проективные пространства. Однородные координаты. Вложение аффинной группы в проективную.

51. Проективная классификация квадрик над полем комплексных чисел.

52. Существование и единственность проективного преобразования, переводящего данные точки в данные.

53. Тензоры. Как они связаны с линейными операторами? Тензорное произведение тензоров.

54. Поведение координат тензора при замене базиса.

55. Свёртка. Опускание и подъём индексов.

56. Симметрические и кососимметрические тензоры. Симметризация и альтернирование, симметрическое и внешние умножение.

57. Прямая сумма пространств: «внешнее» определение и связь с «внутренним» определением прямой суммы.

58. Понятие алгебры. Тензорная алгебра, симметрическая алгебра и внешняя алгебра, их базисы.

* * *

Следующих двух вопросов в билетах нет; студенты, претендующие на «удовлетворительно», имею право ничего по этим вопросам не знать.

59. Конечномерные ассоциативные алгебры с делением над $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$ (теорема Фробениуса).

60. Теорема Витта о сокращении для квадратичных форм.