

# 1 курс, осень 2021

## Вопросы экзамена по алгебре

1. Системы линейных уравнений (СЛУ), их эквивалентность. Приведение СЛУ к ступенчатому виду
2. Метод Гаусса решения системы линейных уравнений
3. Отображения множеств. Композиция отображений. Ассоциативность операции композиции
4. Обратные отображения. Сюръективные, инъективные, биективные отображения. Равносильность понятий биективного и обратимого отображений
5. Закон обобщенной ассоциативности
6. Подстановки. Понятие группы. Доказательство того, что подстановки данного порядка образуют группу
7. Разложение подстановки в произведение независимых циклов
8. Степень подстановки. Свойства степени. Порядок подстановки
9. Четность подстановки. Изменение четности подстановки при умножении на транспозицию
10. Четность подстановки, разложенной в произведение независимых циклов
11. Векторные (линейные) пространства строк и столбцов
12. Линейная зависимость и линейная независимость векторов. Свойства линейной зависимости и независимости
13. Основная лемма о линейной зависимости
14. Базис линейного пространства. Существование базиса у любого подпространства в  $\mathbb{R}^n$ . Равномощность любых двух базисов линейного пространства
15. Ранг матрицы. Совпадение рангов по строкам и столбцам. Вычисление ранга ступенчатой матрицы
16. Теорема Кронекера–Капелли о совместности системы линейных уравнений
17. Линейные отображения линейных пространств. Взаимно однозначное соответствие между линейными отображениями и матрицами
18. Произведение матриц (и линейных отображений). Ассоциативность произведения матриц
19. Транспонирование матриц. Формула для транспонирования произведения матриц
20. Ранг произведения матриц
21. Обратные матрицы. Матрица обратима тогда и только тогда, когда она невырожденна
22. Матрицы элементарных преобразований. Приведение невырожденной матрицы к единичной с помощью элементарных преобразований над строками
23. Вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований
24. Пространство решений однородной системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений
25. Понятие определителя квадратной матрицы. Определитель транспонированной матрицы
26. Свойства определителя

27. Вычисление определителя элементарными преобразованиями. Определитель треугольной матрицы
28. Аксиоматическое задание определителя. Геометрический смысл
29. Разложение определителя по строке или столбцу
30. Определитель матрицы с углом нулей
31. Определитель произведения матриц
32. Фальшивое разложение определителя
33. Формула обратной матрицы и критерий невырожденности матрицы в терминах определителя
34. Формулы Крамера
35. Определитель Вандермонда
36. Группы. Циклические группы. Изоморфизмы групп. Все циклические группы одного порядка изоморфны
37. Смежные классы. Теорема Лагранжа
38. Следствия из теоремы Лагранжа
39. Кольца. Примеры. Кольцо степенных рядов, его обратимые элементы
40. Поля. Характеристика поля. Любое поле содержит простое подполе
41. Построение поля из 4 элементов. Поле  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$
42. Построение поля  $\mathbb{C}$  комплексных чисел. Тригонометрическая форма комплексного числа
43. Формула Муавра. Извлечение корней из комплексных чисел
44. Элементарные свойства делимости в целостном кольце. Простые элементы. Критерий однозначности разложения на простые в кольце с существованием разложения
45. Евклидовы кольца. Существование наибольшего общего делителя двух элементов в евклидовом кольце и его выражение через исходные элементы
46. Факториальность евклидовых колец
47. Лемма Гаусса и критерий (признак) неприводимости Эйзенштейна
48. Поле рациональных дробей. Правильные дроби. Каждая рациональная дробь представляется в виде суммы многочлена и правильной дроби
49. Простейшие рациональные дроби. Разложение правильной рациональной дроби в сумму простейших. Единственность
50. Корни многочленов. Теорема Безу. Кратные корни. Степень многочлена не превышает количества корней с кратностями
51. Дифференцирование в кольце многочленов. Связь дифференцирования и кратности корня. Избавление многочлена от кратных корней
52. Формулы Виета. Симметрические многочлены и элементарные симметрические многочлены
53. Теорема о выражении симметрических многочленов через элементарные. Метод неопределенных коэффициентов
54. Лемма Даламбера
55. Алгебраическая замкнутость поля  $\mathbb{C}$
56. Разложение на неприводимые множители многочлена из  $\mathbb{R}[x]$