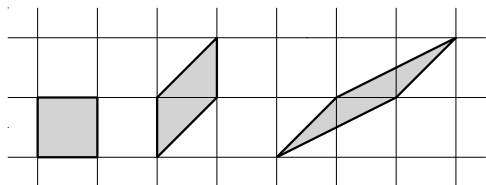


Алгебра и арифметика элементарных параллелограммов

Андрей Леонидович Канунников, механико-математический факультет МГУ

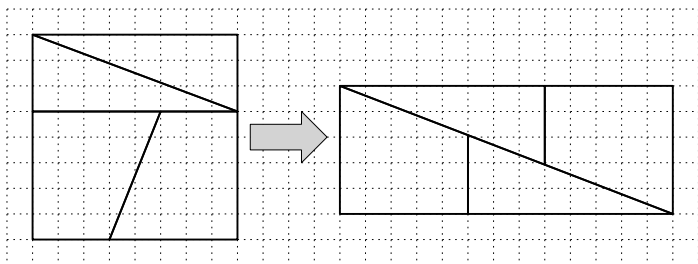
Мы расскажем один классический сюжет, в котором гармонично сочетаются алгебра, геометрия и арифметика. Речь пойдёт об *элементарных параллелограммах* на клетчатой бумаге. Так называются параллелограммы, вершины которых — это узлы тетрадной сетки и которые не содержат ни внутри, ни на границе других узлов. Примеры на рисунке 1:



Их также называют *примитивными*, *простыми*, *фундаментальными*.

Вот одна известная с давних времён детская задача, в которой элементарный параллелограмм спрятан в буквальном смысле слова!

Задача 1. Квадрат 8×8 разрезали на части и сложили из них прямоугольник 5×13 (см. рис. 2). Но $8 \times 8 = 64$, а $5 \times 13 = 65$. Откуда взялась лишняя клетка?



Мы докажем следующий классический результат об элементарных параллелограммах.

Теорема 1. *Параллелограмм с вершинами в узлах клетчатой бумаги является элементарным в точности тогда, когда его площадь равна 1 (площади одной клетки).*

Эта теорема имеет разнообразные применения. Например, она выполняет роль «базы индукции» в доказательстве *формулы Пика*, выражающей площадь S многоугольника с вершинами в узлах сетки через число N узлов, лежащих внутри него, и число D узлов на его границе: $S = N + \frac{D}{2} - 1$, см., например, [2, 3]. (Отметим, что формулу Пика можно доказать и не опираясь на теорему 1 — её частный случай.)

Замечание „на вырост“. С точки зрения высшей алгебры этот критерий элементарности интересен тем, что по сути он эквивалентен описанию базисов свободной абелевой группы $\mathbb{Z}^2$ и описанию группы её автоморфизмов, причём всё сказанное легко обобщается на n -

мерный случай. (Это одна из тем университетского курса алгебры, см., например, [4].)

Существуют разные подходы к доказательству теоремы 1.

- В. И. Арнольд [1] намеренно привёл пусть нестрогое, но понятное «физическое» рассуждение, проясняющее суть дела. Идея в том, что площадь достаточно большой «кляксы» на клетчатой бумаге примерно равна числу единичных квадратов внутри неё, а также числу точек внутри неё, а тогда и числу элементарных параллелограммов внутри неё.
- Ранее, применив эту идею для круга, Гильберт и Кон-Фоссен [5, глава 2, п. 5] изложили строгое доказательство, использующее, правда, предельный переход.
- В. В. Вавилов и А. В. Устинов [2] доказывают равносильную теорему о площади примитивного треугольника (равной $1/2$), окаймляя его прямоугольником со сторонами, параллельными осям координат, и подсчитывая целые точки внутри образовавшихся многоугольников.
- Н. Б. Васильев [3] также рассматривает примитивный треугольник. Основная идея — преобразовать его в треугольник с вершинами в одной клетке путём отражения вершин друг относительно друга.

Предлагаемый нами в §1 метод доказательства — алгебраический. Мы сведём утверждение теоремы 1 — только не удивляйтесь — к решению системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Раскрыть эту удивительную и важную связь между геометрическим и алгебраическим сюжетами — пожалуй, главная цель статьи.

В §2 мы изложим другое доказательство, основанное на арифметических идеях. Главную роль в нём играет алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя двух чисел последовательным делением с остатком.

§1. Алгебраические идеи: соображения линейности

Рассмотрим на координатной плоскости множество точек с целыми координатами (узлов клетчатой бумаги) — оно обозначается¹ через $\mathbb{Z}^2$.

Пусть параллелограмм P имеет вершины $(0, 0)$, (a, b) , (c, d) и $(a + c, b + d)$ в $\mathbb{Z}^2$, т. е., как говорят, построен на векторах (a, b) и (c, d) , или натянут на

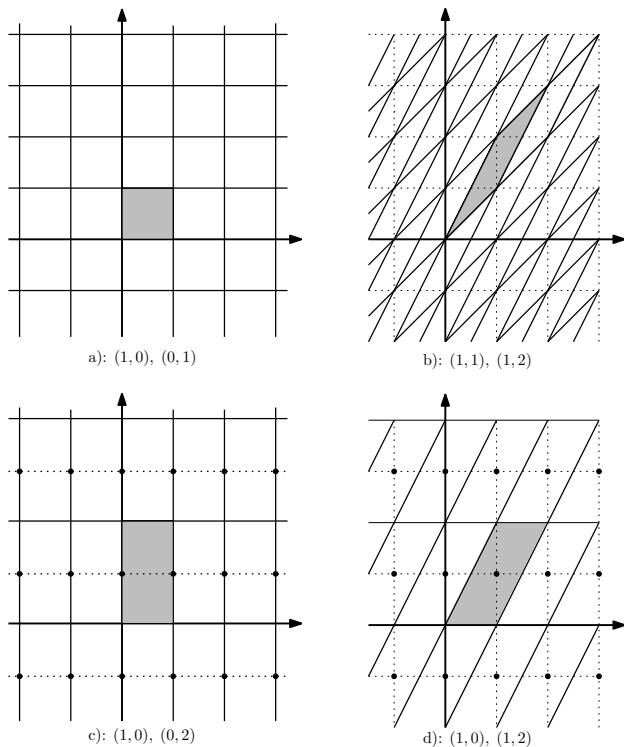
¹Буквой $\mathbb{Z}$ обозначают множество целых чисел (от нем. *Zahl* — число), соответственно, $\mathbb{Z}^2$ — это множество пар целых чисел.

эти векторы. (Мы отождествляем точку $A = (x, y)$ с её радиус-вектором $\overrightarrow{OA}$, где $O = (0, 0)$.)

Рассмотрим решётку, порождённую параллелограммом P , — по определению это множество точек

$$\{x(a, b) + y(c, d) \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$$

(например, единичный квадрат, натянутый на векторы $(1, 0)$ и $(0, 1)$, порождает всю решётку $\mathbb{Z}^2$), см. примеры на рис. 3, где под каждой картинкой подписаны базисные векторы:



Ключевая идея нашего доказательства теоремы 1 — переформулировать условие элементарности следующим образом²:

параллелограмм P элементарен в точности тогда, когда он порождает всю решётку $\mathbb{Z}^2$

(это так на рисунках а) и б) и не так на рисунках с) и д), на которых отмечены узлы $\mathbb{Z}^2$, не являющиеся узлами решётки, порождённой P).

Иными словами, каждая точка из $\mathbb{Z}^2$ должна иметь вид $x(a, b) + y(c, d)$ для некоторых целых x, y , т. е. система уравнений

$$\begin{cases} ax + cy = e \\ bx + dy = f \end{cases} \quad (1)$$

должна иметь решение $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ при всех $e, f \in \mathbb{Z}$.

Число $\Delta := ad - bc$ называется *определителем* системы (1). Легко показать, что при $\Delta \neq 0$ (т. е. при неколлинеарных векторах (a, b) и (c, d)) система (1) имеет единственное решение

$$x = \frac{de - cf}{\Delta}, \quad y = \frac{af - be}{\Delta}.$$

²Эта переформулировка объясняет, почему элементарный параллелограмм называется также *фундаментальным* — это базисный параллелограмм решётки.

³Альтернатива — применить формулу Герона для площади треугольника.

При этом числа x и y должны быть целыми при любых целых e и f . Взяв $(e, f) = (1, 0)$, получим, что d и b кратны Δ , а взяв $(e, f) = (0, 1)$ — что c и a кратны Δ . Отсюда

$$ad, bc : \Delta^2 \implies \Delta = ad - bc : \Delta^2 \implies \Delta = \pm 1.$$

Обратное очевидно: при $\Delta = \pm 1$ числа x, y целые при любых целых e, f . Окончательно,

$$P \text{ элементарен} \iff |ad - bc| = 1.$$

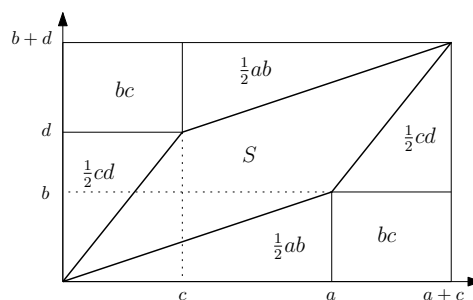
Теорема 1 теперь вытекает из следующего хорошо известного факта.

Теорема 2. *Площадь параллелограмма, построенного на векторах (a, b) и (c, d) , равна $|ad - bc|$.*

Теорема 2 имеет важное самостоятельное значение (геометрический смысл определителя!), и на ней стоит остановиться поподробнее. Сначала приведём наброски доказательств, основанных на школьных идеях.

- *Метод 2 класса.* Построим параллелограмм до окаймляющего его прямоугольника с горизонтальными и вертикальными сторонами с помощью прямоугольных треугольников и прямоугольников — их площади легко находятся. Например, в случае, как на рис. 4, имеем

$$S = (a + c)(b + d) - 2bc - ab - cd = ad - bc.$$



(При перестановке векторов $(a, b) \leftrightarrow (c, d)$ ответ был бы $bc - ad$.) Но бывают и другие случаи расположения векторов — выкладки в них хотя и аналогичны, но формально отличаются. Полный перебор случаев — досадная необходимость, но такова плата за элементарность.

- *Метод 9 класса.* Вычислим площадь параллелограмма как произведение сторон на синус угла между ними, который найдём из теоремы косинусов³. Читатель может проделать выкладки и убедиться, что все корни $\sqrt{a^2 + b^2}$, ... сократятся и останется $|ad - bc|$. Отметим только, что модуль появится при извлечении корня $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$, под которым (среди прочего) окажется $(ad - bc)^2$.

Неуклюжие радикалы появились и исчезли. Может быть, без них можно обойтись?

- *Метод 10 класса.* Воспользуемся той же формулой площади параллелограмма, но более интеллигентно — в полярных координатах:

$$(a, b) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi),$$

$$(c, d) = (R \cos \psi, R \sin \psi).$$

Поскольку углы φ и ψ рассматриваются по модулю 2π , то можно считать, что $-\pi < \psi - \varphi < \pi$. Если $0 < \psi - \varphi < \pi$, то

$$S = rR \sin(\psi - \varphi) =$$

$$= rR(\sin \psi \cos \varphi - \sin \varphi \cos \psi) = ad - bc.$$

Аналогично в случае $0 < \varphi - \psi < \pi$ получим $S = bc - ad$.

Кажущаяся простота этого доказательства обманчива: вся сложность спрятана в формуле синуса разности (которую, кстати, можно доказать, проведя выкладки предыдущим методом). Зато, в отличие от двух предыдущих методов, этот сразу проясняет, от чего зависит раскрытие модуля $|ad - bc|$, и подводит нас к важному понятию *ориентации*.

Базис $(\vec{u}, \vec{v})$ на плоскости считается *положительно ориентированным*, если кратчайший поворот от $\vec{u}$ к $\vec{v}$ происходит против часовой стрелки, а иначе — *отрицательно ориентированным*.

Изложим концептуальное доказательство теоремы 2, *методом 1 курса*.

Площадь $S(\vec{u}, \vec{v})$ параллелограмма, натянутого на неколлинеарные векторы $\vec{u}, \vec{v}$, обладает свойствами:

$$(S_1) \quad S(\vec{u}, k\vec{v}) = kS(\vec{u}, \vec{v}) \text{ при } k > 0;$$

$$(S_2) \quad S(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}) = S(\vec{u}, \vec{v}) + S(\vec{u}, \vec{w}), \text{ если векторы } \vec{v}, \vec{w} \text{ лежат по одну сторону от прямой, содержащей вектор } \vec{u}.$$

Чтобы избавиться в этих свойствах от ограничений, рассмотрим *ориентированную площадь параллелограмма*, называемую также *внешним произведением*:

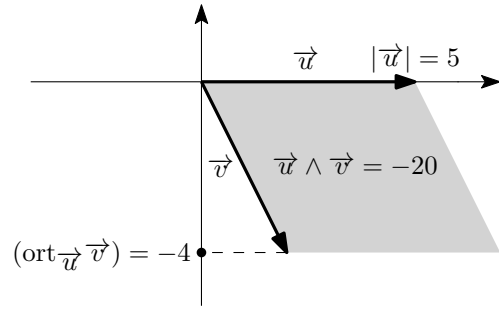
$$\vec{u} \wedge \vec{v} := \pm S(\vec{u}, \vec{v}),$$

где знак определяется ориентацией базиса $(\vec{u}, \vec{v})$, а в случае $\vec{u} \parallel \vec{v}$ считаем, что $\vec{u} \wedge \vec{v} = 0$.

Формулу «площадь параллелограмма есть произведение основания на высоту» теперь можно уточнить:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = |\vec{u}|(\text{ort}_{\vec{u}} \vec{v}),$$

где $(\text{ort}_{\vec{u}} \vec{v}) = \pm |\text{ort}_{\vec{u}} \vec{v}|$ — высота со знаком, определяемым ориентацией точно так же, см. рис. 5:



Чем ориентированная высота $(\text{ort}_{\vec{u}} \vec{v})$ лучше обычной $|\text{ort}_{\vec{u}} \vec{v}|$? А тем, что *уже для всех* векторов $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ и чисел $k \in \mathbb{R}$ (без ограничений как в (S_1) и (S_2)) верны равенства

$$(\text{ort}_{\vec{u}} (\vec{v} + \vec{w})) = (\text{ort}_{\vec{u}} \vec{v}) + (\text{ort}_{\vec{u}} \vec{w}),$$

$$(\text{ort}_{\vec{u}} (k\vec{v})) = k(\text{ort}_{\vec{u}} \vec{v}).$$

Отсюда и из *кососимметричности* $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$ следуют свойства внешнего произведения⁴:

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w},$$

$$\vec{u} \wedge (k\vec{v}) = k(\vec{u} \wedge \vec{v}),$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w},$$

$$(k\vec{u}) \wedge \vec{v} = k(\vec{u} \wedge \vec{v}).$$

Теперь теорему 2 можно доказать алгебраически — раскрытием скобок. Именно, обозначив $\vec{e}_1 = (1, 0)$ и $\vec{e}_2 = (0, 1)$, имеем

$$(a, b) \wedge (c, d) = (a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2) \wedge (c\vec{e}_1 + d\vec{e}_2) =$$

$$= ac \underbrace{\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_1}_0 + ad \underbrace{\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2}_1 + bc \underbrace{\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1}_{-1} + bd \underbrace{\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_2}_0 =$$

$$= ad - bc.$$

Замечание. Теоремы 1 и 2 верны для любой плоской решётки, коль скоро площадь (любого) её базисного параллелограмма принята за единицу; угол между базисными векторами и отношение их длин значения не имеют. В этом легко убедиться, проанализировав приведённые доказательства.

Подробнее об ориентированных площадях см. [6].

§2. Арифметические аспекты: алгоритм Евклида

Элементарные параллелограммы — одни из главных героев *геометрии чисел*, разработанной немецким математиком Германом Минковским в конце XIX века. Они естественным образом связаны с диофантовыми уравнениями и алгоритмом Евклида, раскрывают геометрическую природу цепных дробей [1]. В этом параграфе мы рассмотрим два применения алгоритма Евклида:

- практическое — как найти элементарные параллелограммы с заданной стороной;
- теоретическое — как доказать теорему 1.

⁴Оправдывающие название «произведение». Эти равенства выражают свойство *билинейности* — линейности по каждому аргументу (когда другой фиксирован).

Пусть параллелограмм, построенный на векторах $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}^2$, элементарен. Тогда, в частности, на его сторонах нет узлов сетки (кроме вершин), а это равносильно, как несложно понять, взаимной простоте чисел a, b и чисел c, d . Но мы уже знаем больше: указанные пары чисел, будучи связанными соотношением $|ad - bc| = 1$ (критерием элементарности), как бы подтверждают взаимную простоту друг друга! (Всякий общий делитель a и b , или c и d делит также $ad - bc = \pm 1$, т. е. равен 1.)

Чтобы для данных взаимно простых чисел a и b найти все элементарные параллелограммы с вершинами $(0, 0)$ и (a, b) , надо решить два диофантовых уравнения $ax + by = \pm 1$. Это можно сделать, применив к числам a и b алгоритм Евклида и его обратный ход, выражающий НОД двух чисел их линейной комбинацией. Поясним сказанное на примере.

Пример. Решим уравнения $16x + 39y = \pm 1$.

<i>Прямой ход:</i> $39 = 16 \cdot 2 + 7$ $16 = 7 \cdot 2 + 2$ $7 = 2 \cdot 3 + 1$	<i>Обратный ход:</i> $1 = 7 - 2 \cdot 3 = 7 - (16 - 7 \cdot 2) \cdot 3 =$ $= 7 \cdot 7 - 16 \cdot 3 = (39 - 16 \cdot 2) \cdot 7 -$ $- 16 \cdot 3 = 39 \cdot 7 - 16 \cdot 17.$
--	--

Решение уравнений:

$$16x + 39y = 1 = 39 \cdot 7 - 16 \cdot 17$$

$$\Leftrightarrow 16(x + 17) = 39(7 - y) \quad (\Rightarrow x + 17 : 39,$$

т. к. числа 39 и 16 взаимно просты⁵)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 17 = 39t \\ 7 - y = 16t, \end{cases} \quad \text{где } t \in \mathbb{Z},$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -17 + 39t \\ y = 7 - 16t, \end{cases} \quad \text{где } t \in \mathbb{Z};$$

$$16x + 39y = -1 \Leftrightarrow 16(-x) + 39(-y) = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 17 - 39t \\ y = -7 + 16t, \end{cases} \quad \text{где } t \in \mathbb{Z}.$$

Следуя разобранному примеру, можно доказать следующую теорему (см. любой учебник по элементарной теории чисел).

Теорема 3. Пусть целые числа a, b взаимно просты. Тогда уравнение $ax + by = t$ разрешимо в целых числах при любом целом t ; если (x_0, y_0) — одно из его решений, то общее решение даётся формулой

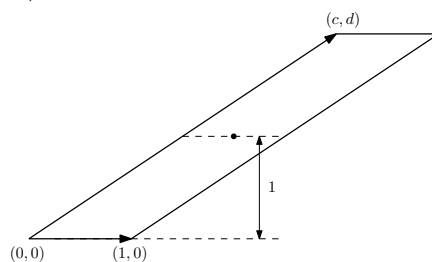
$$(x, y) = (x_0 + bt, y_0 - at), \quad t \in \mathbb{Z}.$$

В частности ($t = \pm 1$), существует бесконечная серия элементарных параллелограммов с вершинами $(0, 0)$ и (a, b) .

В заключение расскажем ещё одно доказательство теоремы 1, в основе которого лежит алгоритм Евклида. Содержательная часть теоремы 1 — в том,

что площадь элементарного параллелограмма равна 1. Обратное проще: параллелограмм с целыми вершинами, внутри или на стороне которого есть целая точка, можно разбить на 3 или 4 треугольника с целыми вершинами, а площадь любого такого треугольника — число полуцелое⁶ и потому не меньше $1/2$.

Итак, пусть элементарный параллелограмм P площади S натянут на векторы (a, b) и (c, d) . Тогда $\text{НОД}(a, b) = 1$. Если $(a, b) = (1, 0)$, то нам повезло: для элементарности P необходимо $d = \pm 1$ (если $|d| > 1$, то P содержит целую точку, отличную от вершины, см. рис. 6), откуда $S = |ad - bc| = |1(\pm 1) - 0c| = 1$.



В общем случае пару (a, b) можно перевести в пару $(1, 0)$ алгоритмом Евклида. Главная идея — выполнить деление с остатком $a = bq + r$ и замену координат $(a, b) \rightarrow (b, r)$ геометрически — совершив преобразование плоскости по правилу

$$\mathcal{A}: (x, y) \mapsto (y, x - qy). \quad (2)$$

(Легко видеть, что при этом параллельные прямые переходят в параллельные, а значит, параллелограммы — в параллелограммы.) Выполнив серию таких преобразований в соответствии с алгоритмом Евклида, переведём P в параллелограмм, натянутый на вектор $(1, 0)$ и ещё какой-то, а этот случай мы уже рассмотрели.

Пример разобран на рис. 7: P натянут на векторы $(3, 2)$ и $(5, 3)$, к координатам $(3, 2)$ применяется алгоритм Евклида: $(3, 2) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (1, 0)$, при этом второй вектор преобразуется так: $(5, 3) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (2, -1)$. Таким образом, P сначала переходит в $\mathcal{A}(P)$, а затем — в $\mathcal{B}(\mathcal{A}(P))$.

Доказательство теоремы 1 завершает

Лемма. Для любого элементарного параллелограмма P его образ $\mathcal{A}(P)$ при отображении (2) (для любого целого q) — элементарный параллелограмм той же площади.

Действительно, вершины P перейдут в вершины $\mathcal{A}(P)$, а остальные целые точки лежат вне P , так что их образы окажутся вне $\mathcal{A}(P)$. Значит, если внутри или на границе параллелограмма $\mathcal{A}(P)$ вдруг оказалась целая точка, отличная от вершины, то её прообраз не из $\mathbb{Z}^2$. Такое и впрямь могло бы случиться, скажем, для преобразования $(x, y) \mapsto (2x, 2y)$, но наше $\mathcal{A}$ отображает решётку $\mathbb{Z}^2$ на себя взаимно однозначно: $x, y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow y, x - qy \in \mathbb{Z}$.

⁵Непосредственное обоснование опирается опять-таки на обратный ход алгоритма Евклида: $x + 17 = 39 \cdot 7(x + 17) - 16 \cdot$

$17(x + 17) = 39 \cdot 7(x + 17) + 17 \cdot 39(y - 7) : 39.$

⁶Следует не только из теоремы 2, но — даже ещё проще — из соображений окаймления, см. „Метод 2 класса“.

при любом целом q . Итак, параллелограмм $\mathcal{A}(P)$ тоже элементарный, как и P .

Что касается равенства площадей P и $\mathcal{A}(P)$, то оно легко проверяется по формуле из теоремы 2. Лемма, а с ней и теорема 1 доказаны.

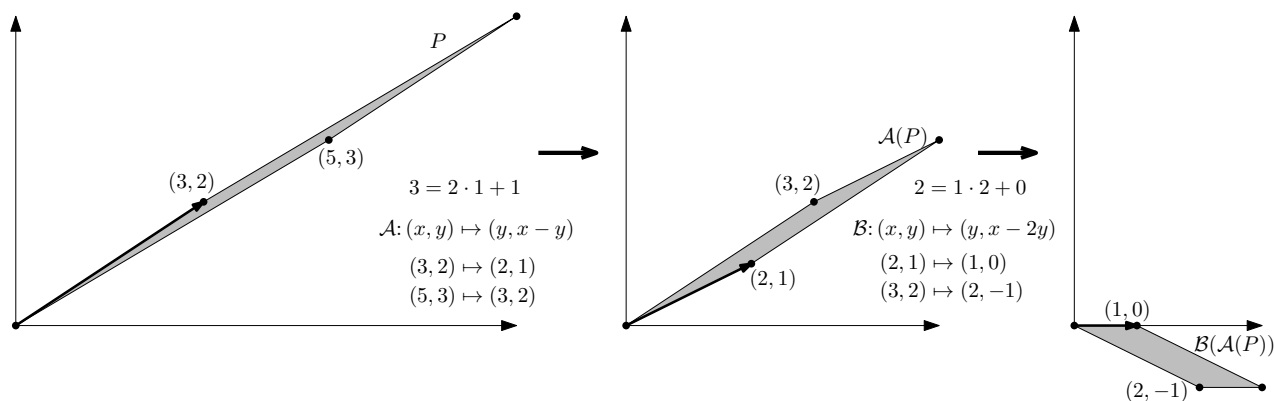
Задача 2. Несложно построить элементарный треугольник со сколь угодно большим периметром. Например, таков треугольник с вершинами $(0, 0)$, $(1, 0)$ и $(n, 1)$. Постройте элементарный треугольник со сколь угодно длинными всеми тремя сторонами.

Задача 3. Для заданных целых чисел a, b, c, d с условием $ad \neq bc$ сосчитайте число узлов сетки, лежащих а) на

границе; б) внутри параллелограмма, построенного на векторах (a, b) и (c, d) .

Задача 4. Докажите аналоги теорем 1 и 2 для параллелепипедов с вершинами в узлах трёхмерной решётки $\mathbb{Z}^3$. (На самом деле они верны и для n -мерной решётки $\mathbb{Z}^n$; для доказательства надо построить теорию систем линейных уравнений и определителей, чем занимаются на первом курсе математических факультетов. Но случай $n = 3$ полезно разобрать самостоятельно в школьные годы.)

Отметим, что трёхмерного аналога формулы Пика не существует, см. [2, с. 58].

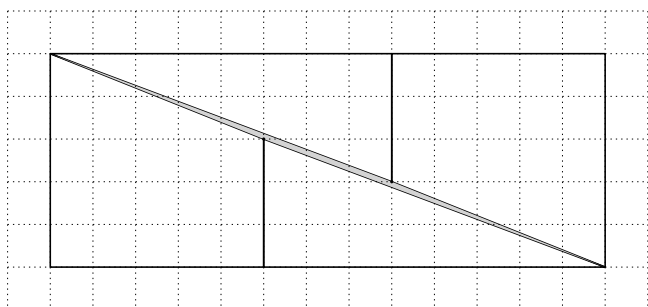


Список литературы

- [1] В. И. Арнольд. Цепные дроби. МЦНМО, 2001.
- [2] В. В. Вавилов, А. В. Устинов. Многоугольники на решётках. МЦНМО, 2006.
- [3] Н. Б. Васильев. Вокруг формулы Пика. Квант, 1974, номер 12.
- [4] Э. Б. Винберг. Курс алгебры. МЦНМО, 2011.
- [5] Д. Гильберт, С. Кон-Фоссен. Наглядная геометрия. ОНТИ, 1936.
- [6] А. Лопшиц. Площади ориентированных фигур. Квант, 1978, номер 3.

**Ответы к задачам статьи
«Алгебра и арифметика
элементарных параллелограммов»**

Задача 1. Фокус в том, что угловые коэффициенты гипотенуз треугольников и боковых сторон трапеций разные (хотя и очень близкие: $3/8$ и $2/5$ соответственно, разница $1/40$), а потому эти отрезки никак не могут слиться в одну линию — диагональ прямоугольника 5×13 . На рисунке 1 это не видно, поскольку линии на нём изображены нарочито жирно. Если же перерисовать его тонким карандашом в крупном масштабе, то по диагонали можно увидеть щель в форме параллелограмма. Его площадь как раз равна площади одной клетки — той самой «лишней».



Отметим, что возникающие в задаче числа $2, 3, 5, 8, 13$ — это подряд идущие члены последовательности Фибоначчи (F_n) , заданной рекуррентно: $F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Эти числа обладают многими замечательными свойствами. На одном из них, $F_{n-1}F_{n+2} - F_nF_{n+1} = (-1)^n$, как раз основан эффект «появления лишней клетки» ($2 \cdot 8 - 3 \cdot 5 = 1$, $3 \cdot 39 - 5 \cdot 8 = -1$.)

Задача 2. Например, треугольник с вершинами $(0, 0)$, $(1, n)$, $(2, 2n + 1)$.

Задача 3. а) $2(a, b) + 2(c, d)$;

б) $|ad - bc| - (a, b) - (c, d) + 1$ (из формулы Пика).

Задача 4. Исследование элементарности параллелепипеда P (отсутствие внутри него и на его гранях целых точек, кроме вершин), натянутого на векторы $\vec{u}_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31})$, $\vec{u}_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32})$, $\vec{u}_3 = (a_{13}, a_{23}, a_{33})$ в $\mathbb{Z}^3$, аналогично двумерному случаю приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (3)$$

с целыми свободными членами b_1, b_2, b_3 и её определителю

$$\begin{aligned} \Delta &:= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ &- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned} \quad (4)$$

Обозначим через Δ_i ($i = 1, 2, 3$) определитель, полученный из (4) заменой i -го столбца столбцом $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

Трёхмерные аналоги теорем 1 и 2 вытекают из следующих двух теорем, доказательство которых оставляется читателю в качестве упражнения.

Теорема 4. Векторы $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ некопланарны тогда и только тогда, когда $\Delta \neq 0$. В этом случае имеют место формулы Крамера:

$$(3) \iff x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Кроме того, эти решения будут целочисленными при любых целых b_1, b_2, b_3 в точности тогда, когда $\Delta = \pm 1$.

Теорема 5. Объём параллелепипеда P равен $|\Delta|$.