

**ПРОГРАММА КОЛЛОКВИУМА ПО АЛГЕБРЕ
ВТОРОЙ КУРС, ВТОРОЙ ПОТОК, МЕХМАТ, ОСЕНЬ 2019**

Клячко

1. Группы. Примеры. Алгебраическое описание диэдральной группы. Изоморфизм.
2. Подгруппы. Системы порождающих. Какую подгруппу порождает множество всех транспозиций в S_n ?
3. Какую подгруппу порождает множество всех тройных циклов в S_n ?
4. Какую подгруппу порождает множество всех трансвекций в $\mathbf{GL}_n(F)$, где F — поле?
5. Порядок элемента. Описание циклических групп с точностью до изоморфизма.
6. Подгруппы циклических групп.
7. Смежные классы. Теорем Лагранжа. Индекс. Нормальные подгруппы. Сопряжённые подгруппы.
8. Гомоморфизмы. Ядро и образ. Нормальность ядра. Факторгруппа. Теорема о гомоморфизмах. Примеры.
9. Теорема Кэли.
10. Теорема о том, что каждая подгруппа H конечного индекса содержит нормальную подгруппу конечного индекса (делящего $|G : H|$).
11. Прямые произведения (внешнее и внутреннее определение). Разложение циклической группы в прямую сумму примарных.
12. Факторгруппа $A \times B$ по подгруппе $H \times K$, где $H \triangleleft A$, а $K \triangleleft B$.
13. Конечны порождённые свободные абелевы группы, базисы. Какие группы изоморфны факторгруппам конечно порождённых свободных абелевых групп?
14. Критерий того, что данный элемент свободной абелевой группы можно включить в базис.
15. Теорема о подгруппах свободных абелевых групп (о согласованных базисах).
16. Теорема о строении конечно порождённых абелевых групп (без единственности).
17. Периодическая часть и p -компонента абелевой группы.
18. Единственность разложения конечно порождённой абелевой группы в прямую сумму бесконечных и примарных циклических групп.
19. Конечные подгруппы мультипликативной группы поля.
20. Коммутаторы и коммутант. Коммутант S_n и A_n при $n > 4$.
21. Коммутант полной и специальной линейной группы при $n > 2$.
22. Связь между коммутантом и нормальными подгруппами, факторгруппы по которым абелевы. Число гомоморфизмов из симметрической группы порядка 2019! в циклическую группу порядка сто.
23. Разрешимые группы. Разрешимость подгрупп и факторгрупп разрешимых групп. «Обратное» утверждение.
24. Разрешимость группы невырожденных треугольных матриц над полем.
25. Действия группы на множестве. Примеры. Действия группы на себе левыми сдвигами, правыми сдвигами и сопряжением. Различные орбиты не пересекаются.
26. Связь между длиной орбиты и индексом стабилизатора. Нормализаторы и централизаторы.
27. Связь между стабилизаторами разных точек одной орбиты.
28. Центр конечной p -группы. Разрешимость конечных p -групп.
29. Группы порядка p^2 .
30. Первая теорема Силова (о существовании).
31. Вторая теорема Силова (о сопряжённости). Следствие о нормальных силовских подгруппах.
32. Третья теорема Силова (о количестве).