

**ПРОГРАММА КОЛЛОКВИУМА ПО АЛГЕБРЕ
ВТОРОЙ КУРС, ПЕРВЫЙ ПОТОК, МЕХМАТ, ОСЕНЬ 2025 ГОДА**

Клячко

1. Группы. Примеры. Алгебраическое описание диэдральной группы. Группа кватернионов. Изоморфизм.
2. Подгруппы. Системы порождающих. Порядок элемента. Описание циклических групп с точностью до изоморфизма.
3. Подгруппы циклических групп.
4. Смежные классы. Теорем Лагранжа и её следствия. Группы порядка 17. Индекс. Нормальные подгруппы. Сопряжённые подгруппы.
5. Гомоморфизмы. Ядро и образ. Нормальность ядра. Факторгруппа. Теорема о гомоморфизмах. Примеры.
6. Группа автоморфизмов группы. Подгруппа внутренних автоморфизмов: её связь с центром и нормальность.
7. Теорема Кэли. Теорема о том, что каждая подгруппа H конечного индекса содержит нормальную подгруппу конечного индекса (делящего $|G : H|!$).
8. Прямые произведения: внешнее и внутреннее определение и связь между ними. Когда прямое произведение двух групп является циклической группой?
9. Факторгруппа $A \times B$ по подгруппе $H \times K$, где $H \triangleleft A$, а $K \triangleleft B$.
10. Конечно порождённые свободные абелевы группы, базисы. Прямые суммы бесконечных циклических групп. Какие группы изоморфны факторгруппам конечно порождённых свободных абелевых групп?
11. Группа автоморфизмов свободной абелевой группы конечного ранга.
12. Критерий того, что данный элемент свободной абелевой группы можно включить в базис (критерий примитивности).
13. Теорема о подгруппах свободных абелевых групп (о согласованных базисах).
14. Теорема о строении конечно порождённых абелевых групп (без единственности).
15. Периодическая часть и p -компонента абелевой группы.
16. Единственность разложения конечно порождённой абелевой группы в прямую сумму бесконечных и примарных циклических групп.
17. Конечные подгруппы мультипликативной группы поля.
18. Действия группы на множестве. Примеры. Действия группы на себе левыми сдвигами, правыми сдвигами и сопряжением. Различные орбиты не пересекаются.
19. Связь между длиной орбиты и индексом стабилизатора.
20. Связь между стабилизаторами разных точек одной орбиты.
21. Центр конечной p -группы (и его пересечение с нормальными подгруппами).
22. Первая теорема Силова (о существовании).
23. Вторая теорема Силова (о сопряжённости). Следствие о нормальных силовских подгруппах. Все p -подгруппы находятся внутри силовских.
24. Третья теорема Силова (о количестве).
25. Группы порядка 15, 33, 35,...
26. Лемма Бернсайда о числе орбит и её следствие о покрытии группы сопряжёнными подгруппами.