

**ПРОГРАММА КОЛЛОКВИУМА ПО АЛГЕБРЕ
ПЕРВЫЙ КУРС, ПЕРВЫЙ ПОТОК, МЕХМАТ, ОСЕНЬ 2026**

Клячко

1. Системы линейных уравнений и связанные с ними матрицы. Приведение матрицы к ступенчатому и улучшенному ступенчатому виду элементарными преобразованиями строк. Всякая система эквивалентна ступенчатой.
2. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Критерии совместности и определенности такой системы в терминах ступенчатого вида.
3. Векторное пространство (над $\mathbb{R}$). Линейная зависимость системы векторов. Основная лемма о линейной зависимости.
4. Базис системы векторов. Базис как максимальная линейно независимая подсистема. Любое линейно независимое подмножество можно дополнить до базиса. Единственность линейного выражения вектора через базис. Все базисы данной системы векторов содержат одно и то же число элементов.
5. Ранг системы векторов и его свойства. Размерность векторного пространства. Связь между $\text{rk} X$ и $\dim \langle X \rangle$ (где X — какое-то множество векторов). Основная лемма о линейной зависимости в терминах рангов.
6. Алгоритм нахождения ранга конечной системы векторов.
7. Ранг матрицы как общее значение ранга системы ее строк, ранга системы ее столбцов и числа ненулевых строк в её ступенчатом виде.
8. Критерии совместности системы линейных уравнений в терминах рангов (теорема Кронекера–Капелли). Критерий определённости системы линейных уравнений.
9. Подпространство решений однородной системы линейных уравнений, его базис (фундаментальная система решений) и размерность. Как найти фундаментальную систему решений?
10. Умножение матриц, свойства дистрибутивности и ассоциативности, существование единицы. Связь умножения и транспонирования.
11. Элементарные матрицы, их связь с элементарными преобразованиями над строками и столбцами матрицы. Представление матрицы в виде произведения элементарных матриц и ступенчатой матрицы. Представление невырожденной матрицы в виде произведения элементарных.
12. Невырожденность (в смысле ранга) равносильна обратимости. Как найти обратную матрицу?
13. Ранг произведения матриц (оценки сверху и снизу). Что можно сказать про ранг произведения, когда один из сомножителей невырожденный?
14. Связь между решениями неоднородной системы и соответствующей ей однородной.
15. Обратная матрица, её единственность, критерий существования. Вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.
16. Понятие группы. Симметрическая группа. Разложения перестановки в произведение транспозиций и в произведение независимых циклов.
17. Чётность (знак) перестановки, её поведение при умножении перестановок. Чётность цикла.
18. Определитель квадратной матрицы. Определитель треугольной матрицы. Определителя транспонированной матрицы.
19. Свойства полилинейности и кососимметричности определителя.
20. Поведение определителя при элементарных преобразованиях над его строками (столбцами). Вычисление определителя посредством приведения к треугольному виду.
21. Критерий равенства определителя нулю.
22. Определитель с углом нулей.
23. Разложение определителя по строке (столбцу). Фальшивое разложение.
24. Явная формула для обратной матрицы.
25. Критерий определенности квадратной системы линейных алгебраических уравнений (теорема Крамера). Формулы Крамера.
26. Теорема о ранге матрицы (характеризация ранга в терминах миноров).
27. Определитель Вандермонда. Приложение к задаче интерполяции.