

Контрольная работа №1, вариант I

1. Вычислите $\begin{pmatrix} \cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha & -\sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha \\ \sin \alpha - \sqrt{3} \cos \alpha & \cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha \end{pmatrix}^n$ при $\alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

2. При каждом $a \in \mathbb{R}$ найдите ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1-a & -3 & 4 \\ 4 & -7-a & 8 \\ 6 & -7 & 7-a \end{pmatrix}$.

3. После семинара по алгебре на доске остались частично стёртые система линейных однородных уравнений 3×5 и одна из её фундаментальных систем решений (найденная правильно):

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 & (1, 1, 1, * *) \\ 3x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 & \text{ФСР: } (-1, 1, 1, * *) \\ x_1 + 2x_2 * * * * * = 0 & (* * 3, 0, 0) \end{cases}$$

а) Найдите какую-нибудь ФСР системы из первых двух уцелевших уравнений.

б) Восстановите пропуски и ответьте, однозначно ли они восстанавливаются.

4. Системы векторов a_1, \dots, a_n и b_1, \dots, b_n в \mathbb{R}^n связаны равенствами

$$\begin{aligned} b_1 &= c_{11}a_1 + \dots + c_{1n}a_n, \\ &\dots \\ b_n &= c_{n1}a_1 + \dots + c_{nn}a_n \end{aligned}$$

для некоторых $c_{ij} \in \mathbb{R}$. Известно, что a_1, \dots, a_n — базис в \mathbb{R}^n . Докажите, что b_1, \dots, b_n — базис в $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow \text{rk}(c_{ij}) = n$.

Контрольная работа №1, вариант II

1. Вычислите $\begin{pmatrix} \cos \beta - \sin \beta & \cos \beta + \sin \beta \\ \cos \beta + \sin \beta & \sin \beta - \cos \beta \end{pmatrix}^n$ при $\beta \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

2. При каждом $b \in \mathbb{R}$ найдите ранг матрицы $\begin{pmatrix} b-1 & 4 & 3 \\ -2 & b+5 & 3 \\ 2 & 4 & b-2 \end{pmatrix}$.

3. Решив систему линейных однородных уравнений, студент получил фундаментальную систему решений и сверился с ответом в задачнике:

$$(5, 3, -1, 0, 0) \qquad (1, 1, 2, 1, 0)$$

Ответ студента: $(6, 4, 1, 1, 0)$ Ответ в задачнике: $(0, 1, 2, 1, 1)$

$$(5, 4, 1, 1, 1) \qquad (3, 2, -3, -1, 1)$$

а) Составьте систему линейных уравнений с ответом как в задачнике.

б) Эквивалентен ли ответ в задачнике ответу, полученному студентом?

4. Системы векторов a_1, \dots, a_n и b_1, \dots, b_n в \mathbb{R}^n связаны равенствами

$$\begin{aligned} b_1 &= c_{11}a_1 + \dots + c_{1n}a_n, \\ &\dots \\ b_n &= c_{n1}a_1 + \dots + c_{nn}a_n \end{aligned}$$

для некоторых $c_{ij} \in \mathbb{R}$. Известно, что $\text{rk}(c_{ij}) = n$. Докажите, что система a_1, \dots, a_n линейно независима \Leftrightarrow система b_1, \dots, b_n линейно независима.

Контрольная работа №1, вариант III

1. Вычислите $\begin{pmatrix} \sin \gamma + \cos \gamma & \sin \gamma - \cos \gamma \\ \cos \gamma - \sin \gamma & \sin \gamma + \cos \gamma \end{pmatrix}^n$ при $\gamma \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

2. При каждом $c \in \mathbb{R}$ найдите ранг матрицы $\begin{pmatrix} -1 - c & -2 & 2 \\ 4 & 5 - c & 4 \\ 3 & 3 & -2 - c \end{pmatrix}$.

3. Решив систему линейных однородных уравнений, студент получил фундаментальную систему решений и хотел свериться с ответом в задачнике, но ответ оказался пропечатан не полностью:

$$(1, 1, 0, 1, 2) \quad (* * 0, 0, -1)$$

Ответ студента: $(1, 0, 1, 1, 2)$ Ответ в задачнике: $(* * 0, 1, 1)$

$$(2, 3, 1, -1, -3) \quad (* * 1, 1, 1)$$

а) Составьте систему линейных уравнений с ответом как у студента.

б) Заполните непропечатанные числа при условии, что ответ в задачнике эквивалентен ответу, полученному студентом. Однозначно ли восстанавливаются пропуски?

4. Системы векторов a_1, \dots, a_n и b_1, \dots, b_n в \mathbb{R}^n связаны равенствами

$$b_1 = c_{11}a_1 + \dots + c_{1n}a_n,$$

...

$$b_n = c_{n1}a_1 + \dots + c_{nn}a_n$$

для некоторых $c_{ij} \in \mathbb{R}$. Известно, что $\langle b_1, \dots, b_n \rangle = \mathbb{R}^n$. Докажите, что система a_1, \dots, a_n линейно независима и что $\text{rk}(c_{ij}) = n$.

Контрольная работа №1, вариант IV

1. Вычислите $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \cos \delta - \sin \delta & \sqrt{3} \sin \delta + \cos \delta \\ \sqrt{3} \sin \delta + \cos \delta & -\sqrt{3} \cos \delta + \sin \delta \end{pmatrix}^n$ при $\delta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

2. При каждом $d \in \mathbb{R}$ найдите ранг матрицы $\begin{pmatrix} d+1 & 4 & 6 \\ -3 & d-7 & -7 \\ 4 & 8 & d+7 \end{pmatrix}$.

3. В задачнике по алгебре друг под другом записаны две системы линейных однородных уравнений. Влад решил первую из них, Слава — вторую, а Владислав по невнимательности решил систему, объединённую из этих двух. Влад и Слава правильно нашли фундаментальные системы решений своих систем:

ФСР Влада: $(1, -1, 2, 3), (0, 1, 2, -1)$;

ФСР Славы: $(1, -2, 3, 4), (-1, 3, 5, -5)$.

а) Составьте какую-нибудь систему уравнений с ФСР как у Славы.

б) Владислав правильно решил свою систему. Какой у него мог получиться ответ?

4. Системы векторов a_1, \dots, a_n и b_1, \dots, b_n в \mathbb{R}^n связаны равенствами

$$b_1 = c_{11}a_1 + \dots + c_{1n}a_n,$$

...

$$b_n = c_{n1}a_1 + \dots + c_{nn}a_n$$

для некоторых $c_{ij} \in \mathbb{R}$. Известно, что система a_1, \dots, a_n линейно независима. Докажите, что ранг системы b_1, \dots, b_n равен рангу матрицы (c_{ij}) .